MEHR ERFAHREN

Abit

Mathemati

Gymnasium · Gesan

NRW

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Stochastik

Nur für den Leistungskurs relevante Inhalte

Analysis

S. 8: Kapitel 2.2 Natürliche Logarithmusfunktion
S. 10: Ableitung von ln(x)
S. 22: unbestimmtes Integral $\int \frac{1}{x}\,dx$
S. 27: Kapitel 6.3 Uneigentliches Integral
S. 28: Volumen von Rotationskörpern

Geometrie

S. 39/40: Kapitel 5.2 Normalenform/Koordinatenform einer Ebene
S. 40–42: Kapitel 5.3 Umwandlung zwischen Parameterform und Normalenform/Koordinatenform
S. 49/50: Lage einer Geraden zu einer Ebene in Koordinatenform
S. 50: Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene
S. 50–52: Kapitel 7.4 Lage zweier Ebenen
S. 53–56: Kapitel 8 Abstände zwischen geometrischen Objekten

Stochastik

S. 71: Sigma-Umgebungen um den Erwartungswert
S. 72–74: Kapitel 4 Normalverteilung
S. 75–78: Kapitel 5 Testen von Hypothesen

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung.

Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Zusätzlich werden **Hinweise und Tipps** für den Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners **(GTR)** oder des Computer-Algebra-Systems **(CAS)** gegeben.
  Diese sind durch einen Taschenrechner gekennzeichnet.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im Buch ist genau gekennzeichnet, welche Inhalte **nur für den LK** wichtig sind. Alle anderen Themen sind für den **GK und LK** prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
STARK Verlag

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden roten STARK-Prüfungsbänden:

- Abiturprüfung NRW, Mathematik LK
- Abiturprüfung NRW, Mathematik GK

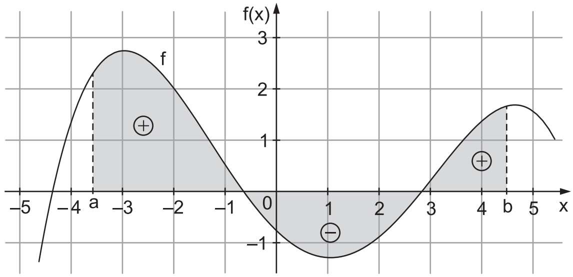
6 Bestimmtes Integral, Flächen- und Volumenberechnung

6.1 Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral ist eine Zahl. Sie drückt die **Flächenbilanz** der Flächen aus, die der Graph einer Funktion f im Intervall [a; b] mit der x-Achse einschließt.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),\ \text{ wobei F Stammfunktion von f ist.}$$

Gilt für die Integrationsgrenzen $a < b$, dann gehen Flächen oberhalb der x-Achse positiv in die Bilanz ein und Flächen unterhalb der x-Achse negativ:



Flächenbilanz

⊕ > ⊖: bestimmtes Integral > 0

⊕ = ⊖: bestimmtes Integral = 0

⊕ < ⊖: bestimmtes Integral < 0

Eigenschaften des bestimmten Integrals

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (Vertauschung der Integrationsgrenzen)

3. $\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx,$ wobei $k \in \mathbb{R}$ (Faktorregel)

4. $\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (Summenregel)

5. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$ wobei $a < c < b$ (Intervalladditivität)

6.2 Flächenberechnung

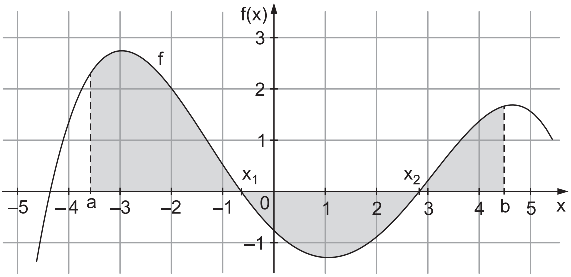
Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

Zur Berechnung des Inhalts der vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche muss in diesem Bereich über f(x) integriert werden. Dabei müssen die Teilflächen ober- und unterhalb der x-Achse getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise
Schritt 1: Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von f im Intervall [a; b] berechnen: $f(x) = 0$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse $\triangleq$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über f(x)

$$A = \left| \int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| + \ldots + \left| \int\limits_{x_n}^{b} f(x)\,dx \right|$$



Bestimmen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ im Intervall [–2; 2] eingeschlossen wird.

Schritt 1: Bestimmung der Nullstellen

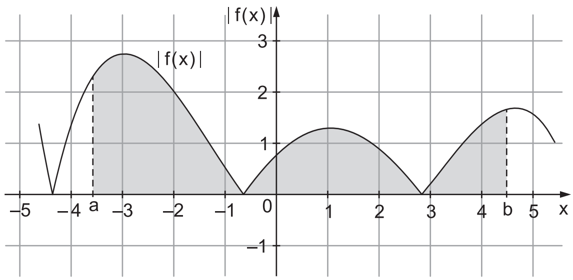
$$
\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^3 - 3x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2(x-3) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x_1 = 0 \text{ (doppelte Nullstelle) oder } x_2 = 3 \notin [-2; 2]
\end{aligned}
$$

Schritt 2: Berechnung der Fläche

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_{-2}^{0} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)\,dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{0}^{2} \right| \\
&= \left| 0 - (4+8) \right| + \left| (4-8) - 0 \right| \\
&= 12 + 4 = 16\,[\mathrm{FE}]
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Mit einem GTR/CAS kann der Flächeninhalt auch ohne vorherige Bestimmung der Nullstellen berechnet werden, indem über die Betragsfunktion $|f(x)|$ vom Anfang bis zum Ende des Integrationsintervalls integriert wird:

$$
A = \int_a^b |f(x)|\,dx
$$



Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen zweier Funktionen f und g im Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche muss über die Differenz von f(x) und g(x) integriert werden. Dabei ist es egal, ob die eingeschlossene Fläche ober- oder unterhalb der x-Achse liegt, allerdings müssen die Teilflächen zwischen den Schnittstellen der beiden Graphen getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise

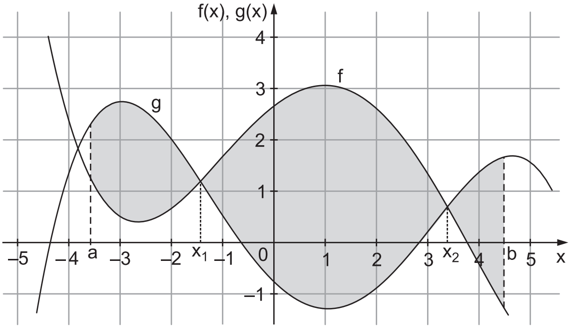
Schritt 1: Schnittstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Graphen von f und g im Intervall [a; b] berechnen:

$f(x) = g(x)$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen von f und g ≙ Summe der Beträge der Einzelintegrale über die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} d(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} d(x)\,dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} d(x)\,dx \right|$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Graph von f oberhalb des Graphen von g liegt oder umgekehrt.



Bemerkung: Mit einem GTR/CAS kann der Flächeninhalt auch hier ohne vorherige Bestimmung der Schnittstellen berechnet werden:

$$A = \int_a^b |d(x)|\,dx$$

6.3 Uneigentliches Integral (nur LK)

Uneigentliches Integral
Wird eine der Integrationsgrenzen beliebig groß (klein), so muss nicht nur ein bestimmtes Integral über ein abgeschlossenes Intervall berechnet, sondern auch ein Grenzwert bestimmt werden. Dieser Grenzwert wird als uneigentliches Integral bezeichnet.

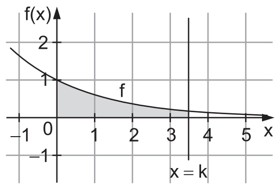
Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ und der x-Achse im I. Quadranten.

Schritt 1: Berechnung des bestimmten Integrals im Intervall [0; k]

$$A(k) = \int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^k = -2e^{-\frac{k}{2}} - (-2)$$

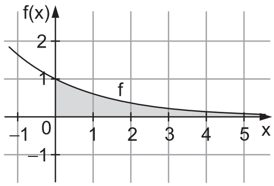
$$= 2 - 2e^{-\frac{k}{2}}$$



Schritt 2: Grenzwertbildung für $k \to +\infty$

$$\lim_{k \to +\infty} A(k) = \lim_{k \to +\infty} \left(2 - 2e^{-\frac{k}{2}}\right) = 2$$

Der Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im I. Quadranten einschließt, besitzt den endlichen Flächeninhalt 2 [FE].



6.4 Mittelwert- und Volumenberechnung

Mittelwert einer Funktion
Ist f eine im Intervall [a; b] integrierbare Funktion, so gilt für den Mittelwert m:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$