

Abitur

**MEHR
ERFAHREN**

Mathematik

Gymnasium · Gesamthochschule
NRW

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1 Ganzrationale Funktionen und ihre Eigenschaften	1
1.1 Definition	1
1.2 Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen	2
1.3 Vielfachheit von Nullstellen	2
1.4 Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems)	4
1.5 Entwicklung von Funktionen	5
2 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion	7
2.1 Natürliche Exponentialfunktion	7
2.2 Natürliche Logarithmusfunktion	8
2.3 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	8
3 Ableitung	10
3.1 Die Ableitung	10
3.2 Ableitungsregeln	11
4 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	12
4.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	12
4.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	15
4.3 Extremwertaufgaben	19
5 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	21
5.1 Stammfunktion	21
5.2 Unbestimmtes Integral	22
6 Bestimmtes Integral, Flächen- und Volumenberechnung	23
6.1 Bestimmtes Integral	23
6.2 Flächenberechnung	24
6.3 Uneigentliches Integral	27
6.4 Mittelwert- und Volumenberechnung	27

Geometrie

1 Lineare Gleichungssysteme	29
1.1 Lösung linearer Gleichungssysteme	29
1.2 Lösung unterbestimmter Gleichungssysteme	30
1.3 Lösung überbestimmter Gleichungssysteme	31

2 Punkte im Koordinatensystem	32
2.1 Punkte im Raum	32
2.2 Abstand von zwei Punkten	32
3 Vektoren	33
3.1 Rechnen mit Vektoren	33
3.2 Linearkombination	34
3.3 Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	34
3.4 Skalarprodukt	34
4 Geraden	36
4.1 Parameterform einer Geraden	36
4.2 Halbgeraden und Strecken	36
5 Ebenen	38
5.1 Parameterform einer Ebene	38
5.2 Normalenform/Koordinatenform einer Ebene	39
5.3 Umwandlung zwischen Parameterform und Normalenform/Koordinatenform	40
6 Projektionen	43
7 Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	44
7.1 Lage eines Punktes zu einer Fläche	44
7.2 Lage zweier Geraden	45
7.3 Lage einer Geraden zu einer Ebene	47
7.4 Lage zweier Ebenen	50
8 Abstände zwischen geometrischen Objekten	53
8.1 Abstand zu einer Ebene	53
8.2 Abstand eines Punktes zu einer Geraden	55

Stochastik

1 Grundlagen	57
2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen	58
2.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	58
2.2 Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	58
2.3 Baumdiagramm	60
2.4 Vierfeldertafel	61
2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	62

3	Zufallsgrößen	65
3.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	65
3.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	66
3.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	68
4	Normalverteilung	72
4.1	Annäherung der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung	72
4.2	Normalverteilte Zufallsgrößen	73
5	Testen von Hypothesen	75
	Stichwortverzeichnis	79

Nur für den Leistungskurs relevante Inhalte

Analysis

- S. 8: Kapitel 2.2 Natürliche Logarithmusfunktion
- S. 10: Ableitung von $\ln(x)$
- S. 22: unbestimmtes Integral $\int \frac{1}{x} dx$
- S. 27: Kapitel 6.3 Uneigentliches Integral
- S. 28: Volumen von Rotationskörpern

Geometrie

- S. 39/40: Kapitel 5.2 Normalenform/Koordinatenform einer Ebene
- S. 40–42: Kapitel 5.3 Umwandlung zwischen Parameterform und Normalenform/Koordinatenform
- S. 49/50: Lage einer Geraden zu einer Ebene in Koordinatenform
- S. 50: Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene
- S. 50–52: Kapitel 7.4 Lage zweier Ebenen
- S. 53–56: Kapitel 8 Abstände zwischen geometrischen Objekten

Stochastik

- S. 71: Sigma-Umgebungen um den Erwartungswert
- S. 72–74: Kapitel 4 Normalverteilung
- S. 75–78: Kapitel 5 Testen von Hypothesen

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung.

Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Zusätzlich werden **Hinweise und Tipps** für den Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners (**GTR**) oder des Computer-Algebra-Systems (**CAS**) gegeben. Diese sind durch einen Taschenrechner  gekennzeichnet.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im Buch ist genau gekennzeichnet, welche Inhalte **nur für den LK** wichtig sind. Alle anderen Themen sind für den **GK und LK** prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
STARK Verlag

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden roten STARK-Prüfungsbänden:

- Abiturprüfung NRW, Mathematik LK
- Abiturprüfung NRW, Mathematik GK

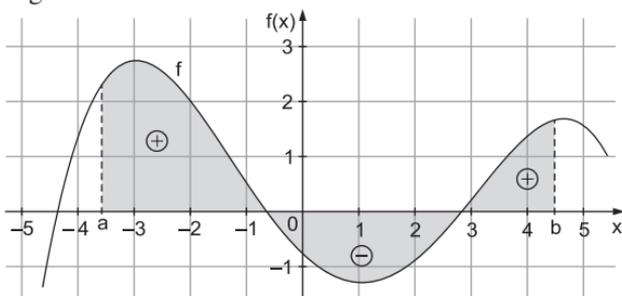
6 Bestimmtes Integral, Flächen- und Volumenberechnung

6.1 Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral ist eine Zahl. Sie drückt die **Flächenbilanz** der Flächen aus, die der Graph einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ mit der x -Achse einschließt.

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei F Stammfunktion von f ist.

Gilt für die Integrationsgrenzen $a < b$, dann gehen Flächen oberhalb der x -Achse positiv in die Bilanz ein und Flächen unterhalb der x -Achse negativ:



Flächenbilanz

$\oplus > \ominus$: bestimmtes Integral > 0

$\oplus = \ominus$: bestimmtes Integral $= 0$

$\oplus < \ominus$: bestimmtes Integral < 0

Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (\text{Vertauschung der Integrationsgrenzen})$$

$$3. \int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx, \text{ wobei } k \in \mathbb{R} \text{ (Faktorregel)}$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \text{ (Summenregel)}$$

$$5. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \text{ wobei } a < c < b \text{ (Intervall-} \\ \text{additivität)}$$

6.2 Flächenberechnung

Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

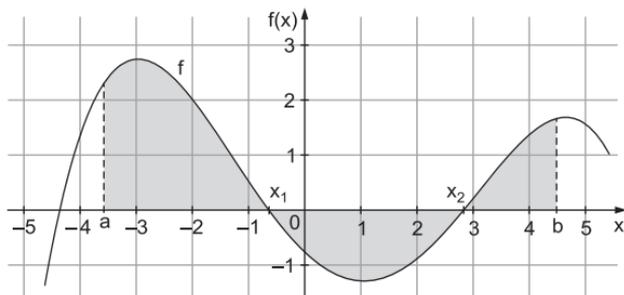
Zur Berechnung des Inhalts der vom Graphen der Funktion f und von der x -Achse im Intervall $[a; b]$ eingeschlossenen Fläche muss in diesem Bereich über $f(x)$ integriert werden. Dabei müssen die Teilflächen ober- und unterhalb der x -Achse getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise

Schritt 1: Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n von f im Intervall $[a; b]$ berechnen: $f(x) = 0$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse $\hat{=}$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über $f(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) \, dx \right|$$





Bestimmen Sie die Fläche, die von der x -Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ im Intervall $[-2; 2]$ eingeschlossen wird.

Schritt 1: Bestimmung der Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 0 \text{ (doppelte Nullstelle) oder } x_2 = 3 \notin [-2; 2] \end{aligned}$$

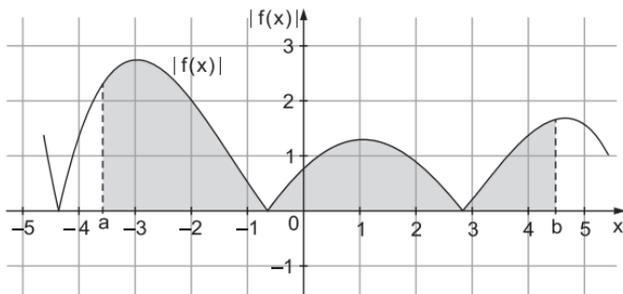
Schritt 2: Berechnung der Fläche

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^0 f(x) \, dx \right| + \left| \int_0^2 f(x) \, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_0^2 \right| \\ &= |0 - (4 + 8)| + |(4 - 8) - 0| \\ &= 12 + 4 = 16 \text{ [FE]} \end{aligned}$$



Bemerkung: Mit einem GTR/CAS kann der Flächeninhalt auch ohne vorherige Bestimmung der Nullstellen berechnet werden, indem über die Betragsfunktion $|f(x)|$ vom Anfang bis zum Ende des Integrationsintervalls integriert wird:

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx$$



Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen zweier Funktionen f und g im Intervall $[a; b]$ eingeschlossenen Fläche muss über die Differenz von $f(x)$ und $g(x)$ integriert werden. Dabei ist es egal, ob die eingeschlossene Fläche ober- oder unterhalb der x -Achse liegt, allerdings müssen die Teilflächen zwischen den Schnittstellen der beiden Graphen getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise

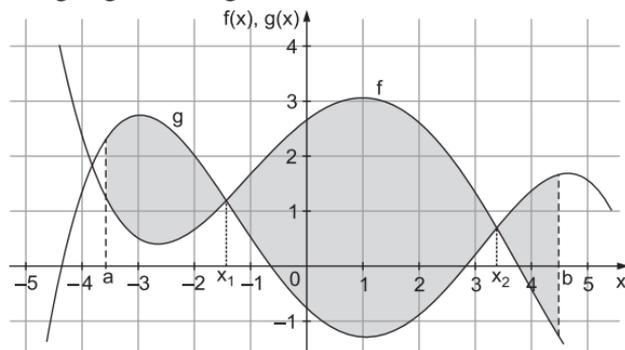
Schritt 1: Schnittstellen x_1, x_2, \dots, x_n der Graphen von f und g im Intervall $[a; b]$ berechnen:

$$f(x) = g(x) \quad \text{mit } a < x < b$$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen von f und g $\hat{=}$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} d(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} d(x) \, dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b d(x) \, dx \right|$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Graph von f oberhalb des Graphen von g liegt oder umgekehrt.



Bemerkung: Mit einem GTR/CAS kann der Flächeninhalt auch hier ohne vorherige Bestimmung der Schnittstellen berechnet werden:

$$A = \int_a^b |d(x)| \, dx$$

6.3 Uneigentliches Integral (nur LK)

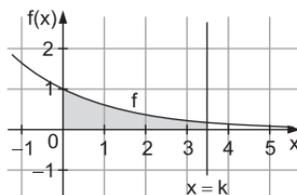
Uneigentliches Integral

Wird eine der Integrationsgrenzen beliebig groß (klein), so muss nicht nur ein bestimmtes Integral über ein abgeschlossenes Intervall berechnet, sondern auch ein Grenzwert bestimmt werden. Dieser Grenzwert wird als uneigentliches Integral bezeichnet.

 Berechne die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ und der x-Achse im I. Quadranten.

Schritt 1: Berechnung des bestimmten Integrals im Intervall $[0; k]$

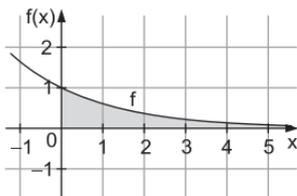
$$\begin{aligned} A(k) &= \int_0^k f(x) \, dx = \int_0^k e^{-\frac{x}{2}} \, dx \\ &= \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^k = -2e^{-\frac{k}{2}} - (-2) \\ &= 2 - 2e^{-\frac{k}{2}} \end{aligned}$$



Schritt 2: Grenzwertbildung für $k \rightarrow +\infty$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (2 - 2e^{-\frac{k}{2}}) = 2$$

Der Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im I. Quadranten einschließt, besitzt den endlichen Flächeninhalt 2 [FE].



6.4 Mittelwert- und Volumenberechnung

Mittelwert einer Funktion

Ist f eine im Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktion, so gilt für den Mittelwert m :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK