MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analysis

mit Hinweisen zur CAS-Nutzung

STARK

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analysis

mit Hinweisen zur CAS-Nutzung

STARK

Inhalt

Autoren:
Winfried Grunewald, Horst Lautenschlager

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, dass Sie sich beim Ansehen der Videos im WLAN befinden. Haben Sie keine Möglichkeit, den QR-Code zu scannen, finden Sie die Lernvideos auch unter:
http://qrcode.stark-verlag.de/540021V

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch unterstützt Sie umfassend bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik (Leistungskursniveau). Bei der Aufbereitung des Analysisstoffs wurde berücksichtigt, dass in den aktuellen Prüfungsaufgaben weniger Gewicht auf formale Rechenfähigkeiten und auf schematische Verfahrensweisen gelegt wird, gleichzeitig aber das Wissen und Anwenden analytischer Grundkenntnisse an Bedeutung gewinnen. Daher werden im ersten Kapitel systematisch die **Eigenschaften reeller Funktionen und der Funktionsgraphen** analysiert, bevor in den nächsten beiden Kapiteln mit der **Differenzial-** und **Integralrechnung** das Herzstück der Analysis behandelt wird. Die dort erlernten Verfahren und Gesetzmäßigkeiten werden im abschließenden Kapitel am Beispiel typischer mathematischer Problemstellungen angewendet.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie noch Schwierigkeiten haben. Folgende strukturelle Maßnahmen erleichtern dabei Ihre Arbeit:

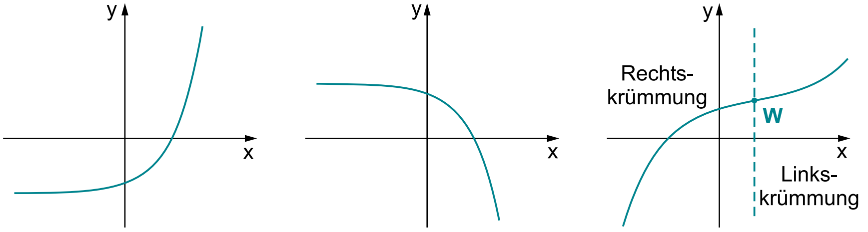
- Die wichtigen **Begriffe** und **Definitionen** eines Lernabschnitts sind schülergerecht und doch mathematisch präzise formuliert in farbigen Feldern, **Regeln, Lehr-** und **Merksätze** in den farbig umrandeten Kästen abgelegt.
- An jeden Theorieteil schließen passgenaue und kommentierte **Beispiele** an. Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.
- Jeder Lernabschnitt schließt mit **Übungsaufgaben**. Zur Selbstkontrolle finden Sie die zugehörigen **Lösungen** am Ende des Buchs vollständig ausgearbeitet.
- Zahlreiche Beispiele und Lösungen der Aufgaben sind zusätzlich mit dem **CAS** vorgerechnet, dafür wurde der Voyage™ 200 benutzt. Da die Bedienung der verschiedenen CAS-Modelle im wesentlichen gleich ist, ist das Buch ebenso geeignet, wenn Sie einen anderen CAS-Rechner verwenden. Es wird stets der Screenshot des Rechners angegeben sowie die Bedienung erläutert. Zudem werden mögliche Schwierigkeiten beim Einsatz des Geräts erwähnt.
- Die mit Stern **(✱)** versehenen Aufgaben dienen der Vertiefung und der Förderung des Problemlöseverhaltens. Sie können bei Zeitmangel ohne nachteilige Auswirkungen für das Grundverständnis übersprungen werden.

Viel Erfolg wünschen Ihnen

Winfried Grunewald Horst Lautenschlager

5.3 Krümmungsverhalten

Die Krümmung eines Funktionsgraphen bzw. der zugehörigen Funktion lässt sich leicht veranschaulichen, wenn man mit dem Finger entlang des Graphen in zunehmender x-Richtung gleitet: Beschreibt der Finger eine Linkskurve (Rechtskurve), spricht man von Linkskrümmung (Rechtskrümmung).



Linkskrümmung | Rechtskrümmung | W ist Wendepunkt

Von besonderem Interesse sind die Punkte des Graphen, in denen er sein Krümmungsverhalten ändert, also z. B. von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht.

Definition

Ein Punkt, in dem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert, heißt **Wendepunkt**, die zugehörige x-Koordinate heißt **Wendestelle**.
Die Tangente an den Funktionsgraphen in einem Wendepunkt wird als **Wendetangente** bezeichnet.
Einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente nennt man **Terrassenpunkt**.

Das Krümmungsverhalten einer Funktion ist wesentlich durch ihre 2. Ableitung bestimmt:

Regel

Hinreichende Bedingung für die Krümmungsart
Gilt für eine auf einem offenen Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f für alle $x \in I$

- $f''(x) > 0$, dann ist f auf I linksgekrümmt.
- $f''(x) < 0$, dann ist f auf I rechtsgekrümmt.

Die Lage der Wendestellen lässt sich mithilfe zweier Lehrsätze berechnen, die in folgender Regel zusammengestellt sind:

Regel

1. Satz: Notwendige Bedingung für Wendestellen

Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge eine Wendestelle besitzt, dann gilt $f''(x_0) = 0$.

2. Satz: Hinreichende Bedingungen für Wendestellen

a) Wenn für eine zweimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge $f''(x_0) = 0$ gilt und wenn $f''(x)$ beim Fortschreiten über die Stelle x_0 hinweg das Vorzeichen wechselt, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

b) Wenn für eine dreimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge $f''(x_0) = 0$ gilt und $f'''(x_0) \neq 0$ ist, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

Diese Kriterien erlauben Ihnen, schrittweise die Wendestellen einer mindestens zwei bzw. dreimal differenzierbaren Funktion f(x) zu ermitteln.

Regel

Schrittweises Bestimmen von Wendestellen

1. Berechnen Sie $f''(x)$.
2. Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$.
3. Berechnen Sie, falls möglich, $f'''(x)$ oder fahren Sie mit Schritt 5 fort.
4. Berechnen Sie den Funktionswert $f'''(x_0)$:
   - Ist $f'''(x_0) \neq 0$, so ist x_0 eine Wendestelle.
   - Ist $f'''(x_0) = 0$, so lässt sich endgültig keine Aussage darüber machen, ob x_0 eine Wendestelle ist. Fahren Sie mit Schritt 5 fort.
5. Überprüfen Sie für jede Lösung x_0, ob $f''(x)$ bei x_0 das Vorzeichen wechselt.
   - Nutzen Sie hierfür das eventuell schon bekannte Krümmungsverhalten von f aus oder ermitteln Sie für kleine positive, reelle h die Vorzeichen von $f''(x_0 + h)$ und $f''(x_0 - h)$.
6. Werten Sie aus:
   - Wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen, so ist x_0 eine Wendestelle.
   - Wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen nicht, so lässt sich mit dem Kriterium des Vorzeichenwechsels keine Aussage darüber machen, ob x_0 eine Wendestelle ist.
7. Falls sich x_0 als Wendestelle erwiesen hat, überprüfen Sie, ob $f'(x) = 0$. Wenn die 1. Ableitung gleich null ist, so handelt es sich um eine Terrassenstelle oder Sattelstelle.

Beispiele

1. Berechnen Sie die Lage des einzigen Wendepunktes der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

   Lösung:

   Schritt 1: Berechnen der 2. Ableitung von f(x)

   $f'(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x(x+1)$

   $f''(x) = e^x \cdot 1 + (x+1) \cdot e^x = e^x(x+2)$

Schritt 2: Berechnen der Nullstellen der 2. Ableitung

$f''(x) = e^x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -2 \;$ (da $e^x > 0$)

Schritt 3: Aufstellen der 3. Ableitung: $f'''(x) = e^x(x+3)$

Schritt 4: Wegen $f'''(-2) = e^{-2} \cdot 1 = e^{-2} \neq 0$ ist $x_0 = -2$ Wendestelle von f.

2. Berechnen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = x^2e^x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Geben Sie damit die Lage aller Wendepunkte der Funktion an.

Lösung:

Schritt 1: Berechnen der 2. Ableitung von f(x)

$f'(x) = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$

$f''(x) = e^x \cdot (2x+2) + (x^2+2x) \cdot e^x = e^x(x^2 + 4x + 2)$

Regel zur Krümmungsart: Wegen $e^x > 0$ stimmt das Vorzeichen von f''(x) mit dem Vorzeichen des quadratischen Terms $x^2 + 4x + 2$ überein. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden Sie, dass die nach oben offene Parabel $y = x^2 + 4x + 2$ die x-Achse bei

$x_1 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

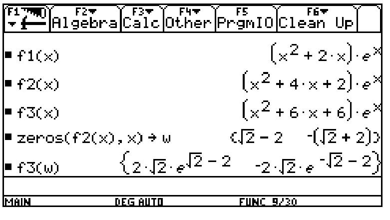
schneidet; sie verläuft daher auf $]-\infty; -2-\sqrt{2}[\; \cup \;]-2+\sqrt{2}; +\infty[$ über und auf $]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$ unter der x-Achse.

Daraus folgt für

- $x \in]-\infty; -2-\sqrt{2}[\cup]-2+\sqrt{2}; +\infty[$: $f''(x) > 0$ und f linksgekrümmt
- $x \in]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$: $f''(x) < 0$ und f rechtsgekrümmt

Schritt 5: f besitzt Wendestellen bei $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

CAS *Hinweise für den CAS-Einsatz:*



Der Befehl **zeros** angewendet auf die 2. Ableitung der Funktion ergibt zwei mögliche Wendestellen. Diese werden mit der Variablen „w“ gespeichert. Die Berechnung **f3(w)** bestätigt, dass die beiden Stellen Wendestellen sind, da $f_3(w) \neq \{0;0\}$.

3. Zeigen Sie, dass der Ursprung Terrassenpunkt der Funktion $f(x) = x^3e^x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist.

Lösung:

Mithilfe der Produktregel berechnen Sie zunächst f'(x), f''(x) und f'''(x):

$f'(x) = x^3 \cdot e^x + e^x \cdot 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$

$f''(x) = e^x \cdot (3x^2 + 6x) + (x^3 + 3x^2) \cdot e^x = e^x(x^3 + 6x^2 + 6x)$

$f'''(x) = e^x \cdot (3x^2 + 12x + 6) + (x^3 + 6x^2 + 6x) \cdot e^x = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$

Dann gilt:

- **Satz 2 b über Wendestellen:** f hat bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle, weil $f''(0) = e^0 \cdot 0 = 0$ und $f'''(0) = e^0 \cdot 6 = 6 \neq 0$.
- **Schritt 7:** Wegen $f'(0) = e^0 \cdot 0 = 0$ besitzt die Wendetangente die Steigung 0 und verläuft horizontal.

f besitzt bei $x = 0$ also einen Terrassenpunkt.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1-x}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ keine Wendestelle besitzt.

Lösung:

Schritt 1: Berechnen der 2. Ableitung von f(x)

$$f'(x) = \frac{(1-x) \cdot 2 - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Satz 1 über Wendestellen: Besäße f eine Wendestelle, hätte die 2. Ableitung mindestens eine Nullstelle. Dies ist aber nicht der Fall, weil der Zähler des Quotienten $\frac{4}{(1-x)^3}$ nicht null wird.

Aufgaben

104. Zeigen Sie, dass die Graphen der folgenden Funktionen genau einen Wendepunkt aufweisen, und berechnen Sie dessen Koordinaten.

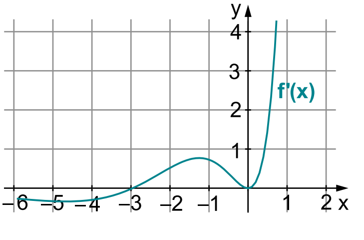
a) $f(x) = \frac{x+1}{e^{2x}}$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

b) $f_k(x) = 4e^{-x}(k - e^{-x})$
$\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}^+$

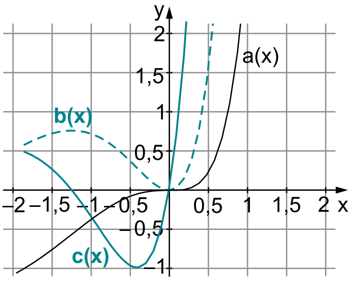
105. Wo schneidet die einzige Wendetangente des Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ die x-Achse?

106. Zeigen Sie, dass alle Wendetangenten der Schar $f_k(x) = (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}}$; $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}^+$ parallel zueinander verlaufen.

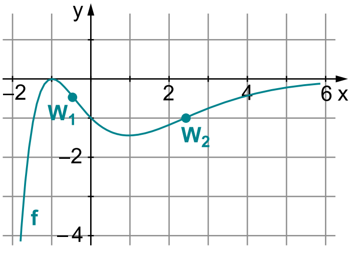
107. Die Skizze zeigt den Graphen der 1. Ableitung f' einer Funktion f. Geben Sie die Lage der Wendestellen der Funktion f möglichst genau an und begründen Sie Ihr Vorgehen.



108. Die Skizze zeigt die Graphen einer Funktion f(x) und ihrer Ableitungen f'(x) und f''(x).
Welcher Graph gehört zu welcher Funktion?
Begründen Sie Ihre Aussagen.



109. Die Skizze zeigt den Graphen G_f einer Funktion f(x) mit seinen beiden Wendepunkten.
Skizzieren Sie den Graphen $G_{f'}$ der Funktion f'(x), wenn alle Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$ auf den Koordinatenachsen liegen.
Begründen Sie Ihr Vorgehen.



✱ **110.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Für die Widerlegung genügt die Skizze eines geeigneten Funktionsgraphen.

a) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion eine Wendestelle besitzt, dann besitzt sie auch mindestens ein relatives Extremum.

b) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion in Teilen ihrer Definitionsmenge rechts- und in anderen linksgekrümmt ist, dann besitzt sie auch eine Wendestelle.

c) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ nur linksgekrümmt ist, dann besitzt sie mindestens ein relatives Minimum.

104. a) **Schritt 1:** Berechnen der 2. Ableitung von f(x)

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 1 - (x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = -\frac{2x+1}{e^{2x}}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{2x} \cdot 2 - (2x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = -\frac{2-(2x+1)\cdot 2}{e^{2x}} = \frac{4x}{e^{2x}}$$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$$f''(x) = 0 \iff \frac{4x}{e^{2x}} = 0 \iff x = 0$$

f besitzt nach Satz 1 über die Wendestellen höchstens bei $x = 0$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Da e^{2x} stets positiv ist, gilt:

$$f''(x) \gtrless 0 \iff \frac{4x}{e^{2x}} \gtrless 0 \iff 4x \gtrless 0 \iff x \gtrless 0$$

Schritt 4: f''(x) wechselt an der Stelle $x_0 = 0$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.
Wegen $f(0) = 1$ lauten die Koordinaten des Wendepunkts $W(0\,|\,1)$.

b) **Schritt 1:** Nach Beseitigung der Klammer mittels Distributivgesetz,

$$f_k(x) = 4e^{-x} \cdot (k - e^{-x}) = 4ke^{-x} - 4e^{-2x},$$

berechnen Sie die 2. Ableitung von f(x) mithilfe der Kettenregel:

$$f_k'(x) = 4ke^{-x} \cdot (-1) - 4e^{-2x} \cdot (-2) = -4ke^{-x} + 8e^{-2x}$$

$$f_k''(x) = -4ke^{-x} \cdot (-1) + 8e^{-2x} \cdot (-2) = 4ke^{-x} - 16e^{-2x} = 4e^{-x}(k - 4e^{-x})$$

Schritt 2: $f_k''(x) = 0 \iff 4e^{-x}(k-4e^{-x}) = 0 \iff k - 4e^{-x} = 0$

$$\iff e^{-x} = \frac{k}{4} \iff x = -\ln\frac{k}{4} = \ln\frac{4}{k}$$

f besitzt nach Satz 1 über die Wendestellen höchstens bei $x = \ln\frac{4}{k}$ eine Wendestelle.

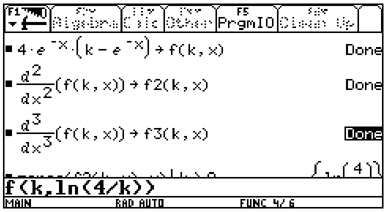
Schritt 3: Wegen $4e^{-x} > 0$ gilt:

$$f_k''(x) \gtrless 0 \iff k - 4e^{-x} \gtrless 0 \iff \frac{k}{4} \gtrless e^{-x} \iff \ln\frac{k}{4} \gtrless -x \iff x \gtrless \ln\frac{4}{k}$$

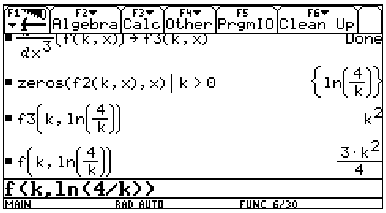
Schritt 4: f''(x) wechselt an der Stelle $x_0 = \ln\frac{4}{k}$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.

$$f_k\left(-\ln\frac{k}{4}\right) = 4ke^{\ln\frac{k}{4}} - 4e^{2\ln\frac{k}{4}} = \frac{4k \cdot k}{4} - 4\left(\frac{k}{4}\right)^2 = \frac{3k^2}{4} \quad \Rightarrow \quad W_k\left(\ln\frac{4}{k} \,\middle|\, \frac{3k^2}{4}\right)$$

Hinweise für den CAS-Einsatz:



Zur Bestätigung einer hinreichenden Bedingung für Wendestellenwird die 3. Ableitung gebildet.



Laut Voraussetzung ist $k > 0$. Dies sollte bei der Ermittlung der Nullstellen der 2. Ableitung als zusätzliche Bedingung angegeben werden.

105. Sie müssen zunächst (in vier Schritten) die Koordinaten des Wendepunkts ermitteln, daraus die Gleichung der Tangente berechnen und schließlich deren Schnittpunkt mit der x-Achse bestimmen.

Schritt 1: $f'(x) = x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) + e^{1-x} \cdot 1 = e^{1-x}(1-x)$

$f''(x) = e^{1-x} \cdot (-1) + (1-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(x-2)$

Schritt 2: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-x}(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

f besitzt höchstens bei $x = 2$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Wegen $e^{1-x} > 0$ gilt:

$f''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; x \gtrless 2$

Schritt 4: f"(x) wechselt an der Stelle $x_0 = 2$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.

Durch Einsetzen von $f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1}$ und $f'(2) = e^{1-2}(1-2) = -e^{-1}$ in die Tangentenformel erhalten Sie die Gleichung der Wendetangente:

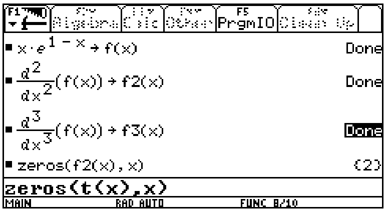
$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$$
$$= -e^{-1} \cdot (x-2) + 2e^{-1} = -e^{-1}(x-4)$$

Wegen

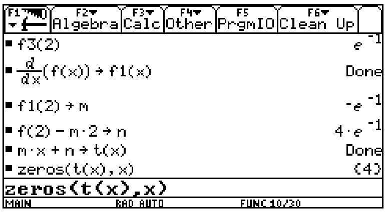
$t(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -e^{-1}(x-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$

schneidet die Wendetangente die x-Achse im Punkt $(4\,|\,0)$.

Hinweise für den CAS-Einsatz:



An der Stelle $x = 2$ ist die 2. Ableitung gleich null. Die 3. Ableitung ist ungleich null, sodass eine hinreichende Bedingung für eine Wendestelle bei $x = 2$ erfüllt ist.



Die Tangentengleichung wird mithilfe der normalen Geradengleichung $t(x) = m \cdot x + n$ definiert, indem zunächst m und dann n berechnet werden. Die Nullstelle der Tangente ergibt die gesuchte Lösung.

106. Hier müssen Sie zeigen, dass die Steigungen der Scharkurven an den Wendestellen unabhängig vom Scharparameter k sind.

Schritt 1: $f_k'(x) = (x-k)\cdot e^{2-\frac{x}{k}}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) + e^{2-\frac{x}{k}}\cdot 1 = e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{x}{k}+2\right)$

$f_k''(x) = e^{2-\frac{x}{k}}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{x}{k}+2\right)\cdot e^{2-\frac{x}{k}}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) = e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2}\right)$

Schritt 2: $f_k''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3k$

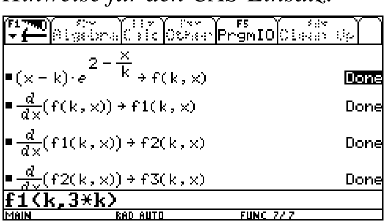
Schritt 3: Wegen $e^{2-\frac{x}{k}} > 0$ und $k \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$f_k''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2} \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{k^2} \gtrless \frac{3}{k} \;\Leftrightarrow\; x \gtrless 3k$

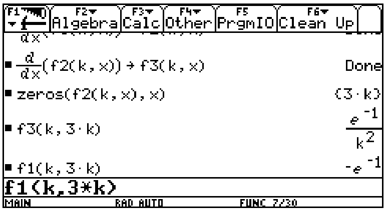
Schritt 4: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0 = 3k$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f_k.

Wegen $f_k'(3k) = e^{2-\frac{3k}{k}}\left(-\frac{3k}{k}+2\right) = -e^{-1}$ haben alle Wendetangenten die gleiche Steigung und verlaufen daher parallel.

Hinweise für den CAS-Einsatz:



Durch das Berechnen der 3. Ableitung bei $x = 3k$ wird bestätigt, dass sich dort eine Wendestelle befindet.



Da f1(k, 3k) unabhängig von k ist, haben die Wendetangenten alle die Steigung $-e^{-1}$.

107. Der Graph der Funktion f besitzt dort Wendepunkte, wo sich sein Krümmungsverhalten ändert. Da dieses wegen $f''(x) = (f')'(x)$ mit dem Steigungsverhalten von f' übereinstimmt, besitzt der Graph von f' also bei den Wendestellen von f relative Extrema. Der Skizze entnimmt man, dass f' bei

- $x_1 \approx -4{,}7$ vom Fallen ins Steigen,
- $x_2 \approx -1{,}3$ vom Steigen ins Fallen,
- $x_3 = 0$ vom Fallen ins Steigen

wechselt. Daher sind x_1, x_2, x_3 die Wendestellen von f.

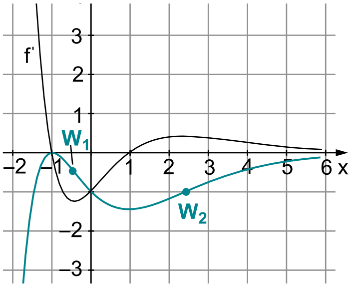
108. Zunächst versuchen Sie im Ausschlussverfahren herauszufinden, welcher Graph f(x) ist.

- Annahme $c(x) = f(x)$: Dann wäre entweder $a(x) = f'(x)$ oder $b(x) = f'(x)$. Beides ist nicht möglich, weil weder a(x) noch b(x) bei $x_0 = -0{,}4$ eine Nullstelle aufweisen, obwohl c dort ein relatives Minimum besitzt.
  Die Annahme $c(x) = f(x)$ ist daher falsch.
- Annahme $b(x) = f(x)$: Dann wäre entweder $a(x) = f'(x)$ oder $c(x) = f'(x)$.
  - $a(x) = f'(x)$ ist nicht möglich, da a(x) an der Stelle $x_0 = -1{,}3$ keine Nullstelle besitzt, obwohl b(x) dort ein relatives Maximum aufweist.
  - $c(x) = f'(x)$ ist nicht möglich, weil dann $a(x) = f''(x)$ wäre und b(x) an der Stelle $x_0 = -0{,}4$ eine Wendestelle aufweist, obwohl a(x) dort keine Nullstelle besitzt.

  Die Annahme $b(x) = f(x)$ ist daher falsch.

Es bleibt nur noch $f(x) = a(x)$. Da $a'(x) \neq c(x)$, weil a(x) bei $x_0 = -1{,}3$ keine horizontale Tangente besitzt, obwohl c(x) dort eine Nullstelle aufweist, gilt $a'(x) = b(x)$ und somit: $f(x) = a(x)$, $f'(x) = b(x)$, $f''(x) = c(x)$.

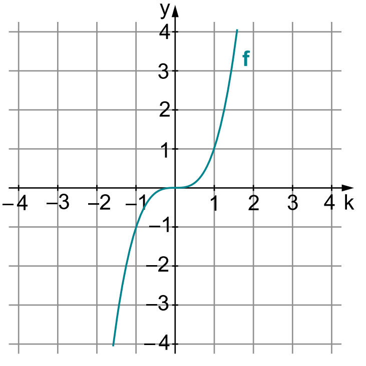
109. Folgende Überlegungen führen zum rechts gezeigten Graphen von f':



- Die Nullstellen von f'(x) liegen dort, wo G_f horizontale Tangenten besitzt, also bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
- $G_{f'}$ verläuft dort unterhalb der x-Achse, wo G_f streng monoton fällt, und dort oberhalb der x-Achse, wo G_f streng monoton steigt.
- $G_{f'}$ weist dort ein relatives Minimum auf, wo G_f von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht.
- $G_{f'}$ weist dort ein relatives Maximum auf, wo G_f von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht.
- Gemäß Aufgabenstellung liegen alle Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$ auf den Koordinatenachsen, also bei $(-1\,|\,0)$ und $(0\,|\,-1)$.

110. Alle Aussagen sind falsch.

a) Die Funktion
$f(x) = x^3;\ x \in \mathbb{R}$
ist zweimal differenzierbar, weist bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle auf, besitzt aber kein relatives Extremum.



b) Die Funktion
$f(x) = \frac{1}{x};\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
ist zweimal differenzierbar, auf $\mathbb{R}^+$ links- und auf $\mathbb{R}^-$ rechtsgekrümmt, besitzt aber in ihrer Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ keine Wendestelle.