GYMNASIUM

TRAINING

MATHEMATIK

MEHR ERFAHREN

Grundwissen

Geometrie 7. Klasse

STARK

Inhalt

Vorwort
So arbeitest du mit diesem Buch

Hinweise und Tipps zur effektiven Lösung von Mathematikaufgaben **1**

Winkelbetrachtungen **9**
1 Winkel und Winkelsätze an Geradenkreuzungen 10
2 Winkelsumme im Dreieck 16
3 Besondere Dreiecke 21
4 Winkelsumme in Vierecken und anderen Vielecken 27
5 Besondere Vierecke 31

Kongruenz **39**
1 Kongruente Figuren 40
2 Dreieckskonstruktionen 43
3 Kongruenzsätze 54
4 Konstruktion von Vierecken 59

Besondere Punkte und Linien im Dreieck **65**
1 Mittelsenkrechte und Umkreis 66
2 Winkelhalbierende und Inkreis 70
3 Seitenhalbierende und Schwerpunkt, Höhe und Höhenschnittpunkt 74

Grundwissen der 5. bis 7. Klasse **77**

Lösungen **91**

Autorin: Monika Muthsam

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem auf den **Lehrplan** abgestimmten Trainingsbuch kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff** für die **Geometrie** in der **7. Klasse** selbstständig wiederholen und dich optimal auf Klassenarbeiten vorbereiten.

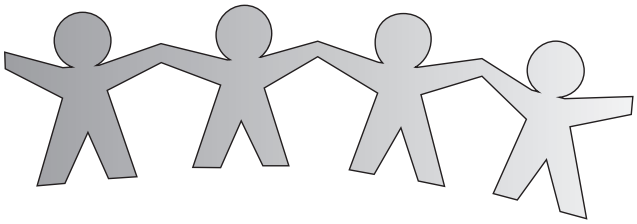
- Um dir bei der Herangehensweise an mathematische Probleme zu helfen, erhältst du im ersten Teil dieses Buches **Hinweise und Tipps zur effektiven Lösung von Mathematikaufgaben**.
- In den folgenden Kapiteln werden alle **unterrichtsrelevanten Themen** aufgegriffen und anhand von ausführlichen **Beispielen** veranschaulicht. **Kleinschrittige Hinweise** erklären dir die einzelnen Rechen- oder Denkschritte genau. Die Zusammenfassungen der **zentralen Inhalte** sind außerdem in blauer Schrift hervorgehoben.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad bieten dir die Möglichkeit, die verschiedenen Themen einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du den gelernten Stoff auch anwenden kannst. Komplexere Aufgaben, bei denen du wahrscheinlich etwas mehr Zeit zum Lösen brauchen wirst oder die sich auch auf Themengebiete aus der 5. und 6. Klasse beziehen, sind mit einem ✳ gekennzeichnet.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit **ausführlichen Hinweisen**, die dir den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.
- Begriffe, die dir unklar sind, kannst du im **Grundwissen der 5. bis 7. Klasse** nachschlagen. Dort sind alle wichtigen Definitionen aus der Geometrie zusammengefasst, die du am Ende der 7. Klasse wissen musst.

Ich wünsche dir gute Fortschritte bei der Arbeit mit diesem Buch und viel Erfolg in der Mathematik!

Monika Muthsam

1 Kongruente Figuren

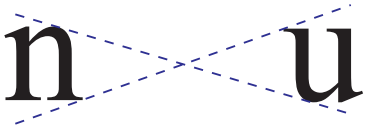
Figuren, die ausgeschnitten so aufeinandergelegt werden können, dass sie zur Deckung kommen, nennt man deckungsgleich oder **kongruent** (von congruere [lat.]: übereinstimmen).

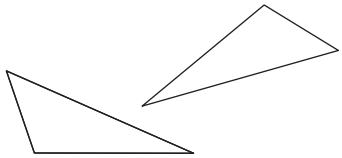


Zwei **kongruente Figuren** F_1 und F_2 haben **gleiche Form** und **Größe**. Sie stimmen in allen sich **entsprechenden Größen** wie z. B. Strecken und Winkel überein.
Man schreibt: $F_1 \cong F_2$

Beispiele

Kongruente Figuren:

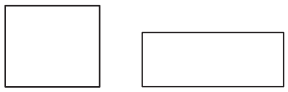




Nicht kongruente Figuren:

- Diese Figuren haben verschiedene Größen und sind somit nicht kongruent.

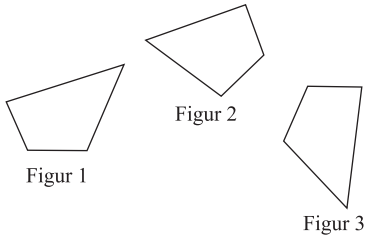
- Auch Figuren mit gleichem Flächeninhalt müssen nicht kongruent sein.



Kongruenzabbildungen
Bei **Achsenspiegelungen, Punktspiegelungen, Verschiebungen** und **Drehungen** werden weder Längen noch Winkel verändert.
Figuren, die durch eine oder mehrere derartige Abbildungen auseinander hervorgehen, sind **kongruent**.

Beispiel

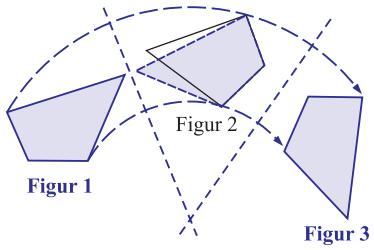
Welche der gezeichneten Vierecke sind kongruent? Begründe.



Lösung:
Möglichkeit 1:
Zeichnet man den **Umriss** von Figur 1 auf einer **Folie** nach und legt diese Folie über die anderen beiden Figuren, so stellt man fest, dass der Umriss nur bei Figur 3 zur Deckung gebracht werden kann. Die Folie muss dazu gedreht und gewendet werden.

Möglichkeit 2:
Misst man **alle Seiten** und **Winkel**, so stimmen diese nur in Figur 1 und Figur 3 überein.

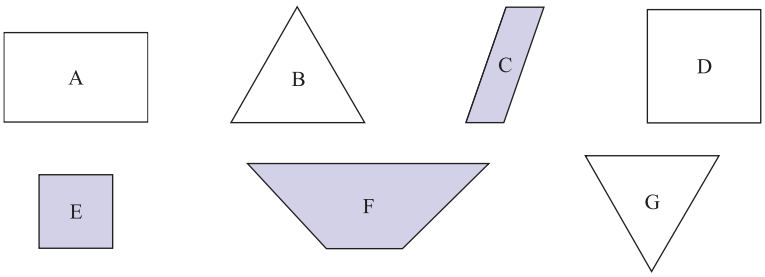
Möglichkeit 3:
Finde **Kongruenzabbildungen**, die die Figuren aufeinander abbilden. Dies ist nur bei Figur 1 und Figur 3 möglich.
Figur 3 ergibt sich aus Figur 1 durch zweimalige Achsenspiegelung oder durch Drehung.
Bei Figur 2 werden nur drei der vier Ecken aufeinander abgebildet.



Aufgaben

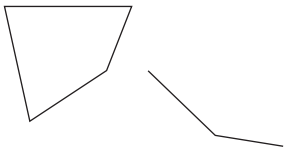
43. Welche Figuren sind:

farbgleich? formgleich? flächengleich? kongruent?

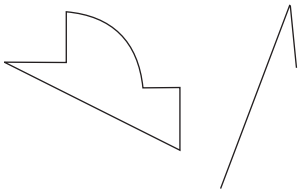


44. Ergänze zu kongruenten Figuren.

a)

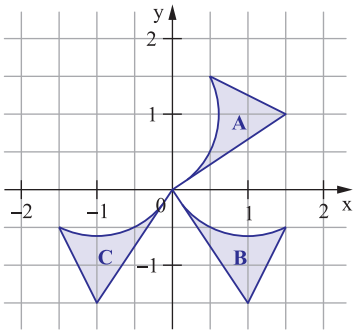


b)

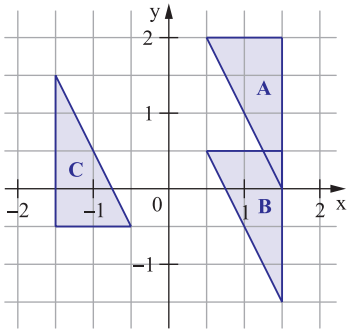


45. Beschreibe, durch welche beiden Kongruenzabbildungen Figur A auf Figur B und anschließend auf Figur C abgebildet wird.

a)



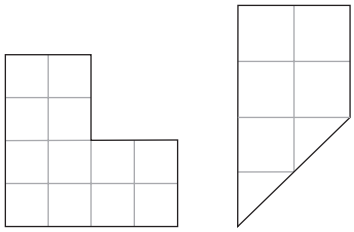
b)



46. Zerlege die rechts abgebildeten Figuren in jeweils

a) drei kongruente Teilfiguren.

✳ b) vier kongruente Teilfiguren.



47. a) Was muss gelten, damit zwei Strecken, zwei Kreise bzw. zwei Rechtecke kongruent sind?

b) Was muss gelten, damit ein Drachenviereck und ein Parallelogramm kongruent sind?

48. Überprüfe die Aussagen. Begründe richtige Aussagen und gib bei falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

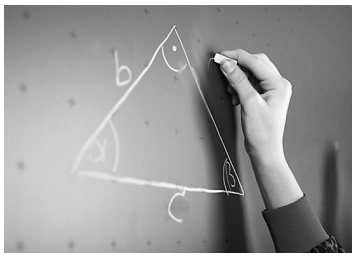
a) Quadrate mit gleichem Umfang sind kongruent.

b) Rauten mit gleichem Umfang sind kongruent.

c) Kongruente Figuren sind zueinander achsen- oder punktsymmetrisch.

2 Dreieckskonstruktionen

Jede Figur mit geraden Rändern kann in einzelne Dreiecke zerlegt werden. Daher lassen sich viele Fragestellungen zu allgemeinen Figuren auf die häufig wesentlich einfachere Behandlung an Dreiecken zurückführen. Sehr häufig wird diese Technik beim Konstruieren angewandt, weshalb speziell den Dreieckskonstruktionen große Bedeutung zukommt.



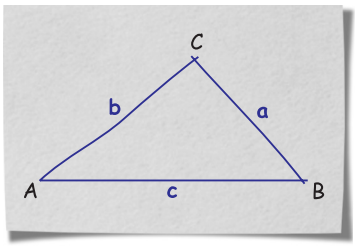
Allgemeine Tipps zum Konstruieren

1. Zeichne zunächst eine **Planfigur**, in der du alle gegebenen Größen deutlich hervorhebst, z. B. **durch farbige Kennzeichnung**.
2. Anhand der Planfigur überlegst du dir das notwendige Vorgehen. Achte darauf, **keinen Sonderfall** zu zeichnen, sofern dieser nicht verlangt ist.
3. Du musst die Lage der Punkte A, B und C herausfinden. Ein Punkt ist bestimmt als Anfang oder Ende einer Strecke, als Scheitel eines Winkels, als Schnittpunkt zweier Kreislinien oder als Schnittpunkt einer Kreislinie mit einem freien Schenkel.
4. Überlege dir, in welcher **Reihenfolge** du am besten vorgehst. Die Wahl, mit welcher Größe du beginnst, ist oft entscheidend für das Gelingen der Konstruktion. Beginne möglichst mit der Seite oder dem Winkel, bei dem du die meisten anschließenden Größen kennst. Natürlich gibt es auch Ausnahmen, durchdenke deshalb die Konstruktion bis zum Ende.
5. Schreibe analog zu deiner Überlegung die **Konstruktionsbeschreibung** und führe die **Konstruktion** durch.

Beispiele

1. Konstruiere das Dreieck ABC aus den gegebenen drei Seiten:
   a = 1,5 cm, b = 1 cm, c = 2 cm

   Lösung:
   Erstelle zunächst eine **Planfigur** und kennzeichne die gegebenen Größen farbig.



42. a) $\alpha = \gamma = 105°$
$\beta = 90° \neq 60° = \delta$
Da mit α und γ zwei gegenüberliegende Winkel gleich groß sind und die beiden anderen Winkel β und δ unterschiedlich groß sind, kann es sich bei dem besonderen Viereck nur um ein **Drachenviereck** handeln.

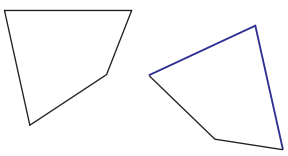
b) $a = c = 3{,}5$ cm
$b = d = 2{,}3$ cm
Die gegenüberliegenden Seiten a und c sowie b und d sind gleich lang. Es liegt ein **Parallelogramm** oder **Rechteck** vor.

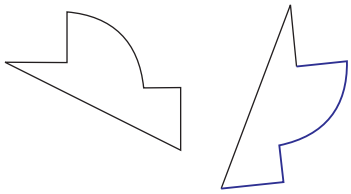
c) $\alpha + \beta = 120° + 60° = 180°$
$\gamma + \delta = 70° + 110° = 180°$
Da sich die benachbarten Winkel α und β sowie γ und δ zu 180° ergänzen und alle Winkel unterschiedlich groß sind, handelt es sich um ein **Trapez**.

43.

farbgleich:	Figur **C, E und F** sowie Figur **A, B, D und G**
formgleich:	Figur **D und E** Beide Figuren sind Quadrate. Dies lässt sich durch Messen überprüfen. Figur **B und G** Beide Figuren sind gleichseitige Dreiecke. Dies lässt sich ebenfalls durch Messen überprüfen.
flächengleich:	Figur **A und D** Die Gleichheit der Flächeninhalte kann man abschätzen. Will man es genau wissen, kann man den Flächeninhalt des Rechtecks und Quadrates berechnen. Figur **B und G** Da die Seiten von beiden Dreiecken gleich lang sind, ist auch ihr Flächeninhalt gleich.
kongruent:	Figur **B und G** Schneidet man die zwei Figuren aus, können sie direkt aufeinandergelegt werden.

44. Hinweise und Tipps:
Miss die entsprechenden Winkel und Längen und ergänze sie bei der angefangenen Figur.

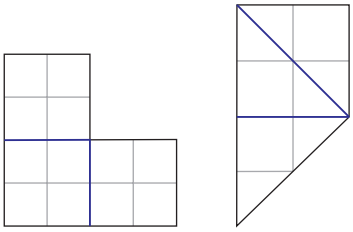
a) 

b) 

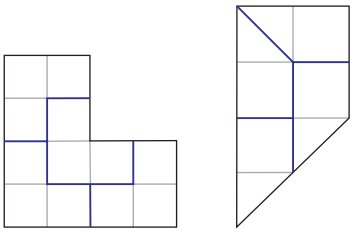
45. a) Eine **Drehung** um 90° um den Ursprung bildet Figur A auf Figur B ab. Durch eine **Achsenspiegelung** an der y-Achse gelangt man von Figur B zu Figur C.

b) Eine **Verschiebung** um 1,5 Einheiten nach unten bildet Figur A auf Figur B ab.
Durch eine **Punktspiegelung** am Ursprung **oder** eine **Drehung** um 180° um den Ursprung kann Figur B mit Figur C zur Deckung gebracht werden.

46. a)



b)



Hinweise und Tipps:
Um zu einer Lösung zu gelangen, musst du einfach kniffeln. Die eingezeichneten Kästchen helfen dir dabei. Versuche, die Kästchen gleichmäßig aufzuteilen, sodass nicht nur die Anzahl der Kästchen, die auf eine Teilfigur entfallen, übereinstimmt, sondern auch deren Lage zueinander.

47. a) Zwei Strecken sind kongruent, wenn sie die **gleiche Länge** haben.
Zwei Kreise sind kongruent, wenn sie den **gleichen Radius** haben.
Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn sie die **gleiche Länge** und die **gleiche Breite** haben.

b) Ein Drachenviereck und ein Parallelogramm sind kongruent, wenn das Drachenviereck zugleich Parallelogramm ist oder das Parallelogramm zugleich ein Drachenviereck ist. Dies ist bei der **Raute** der Fall.

48. a) Die Aussage ist **richtig**. Da bei einem Quadrat die Seiten gleich lang sind, lässt sich aus dem Umfang eindeutig die Seitenlänge bestimmen. Quadrate mit gleichem Umfang haben also gleiche Seitenlänge und sind somit kongruent.

© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK