Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Thüringen

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analytische Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im schriftlichen Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben und Lernvideos finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:
- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 540021V)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 540038V)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 94009V)

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in dem Band:
- Abiturprüfung Thüringen, Mathematik (Bestell-Nr. 165100)

2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

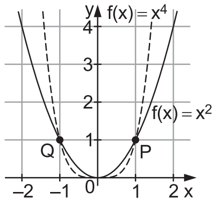
2.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:
$f\colon x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$
Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

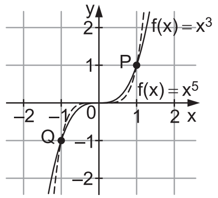
- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
  Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$
  Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

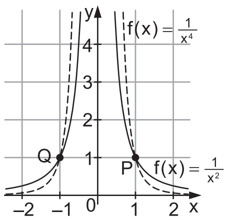
Parabeln: n gerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$



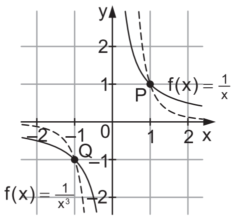
n ungerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$



Hyperbeln: n gerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$

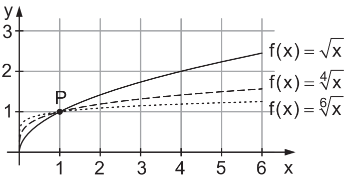


n ungerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Wurzelfunktion
Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:
$f\colon x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ (n-te Wurzelfunktion)
Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$

1. G_f verläuft durch P(1 | 1).
2. Einzige Nullstelle: $x = 0$
3. Je größer n, desto
   - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
   - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$f\colon x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

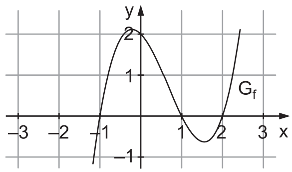
mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Die Werte $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.
Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.7).

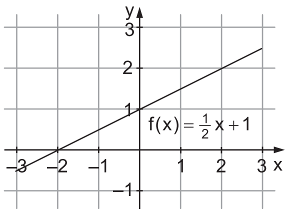
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 2$, $x = -1$ und $x = 1$

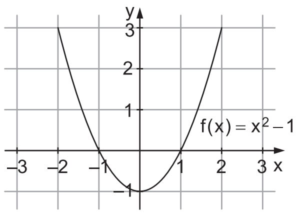


Spezialfälle

Lineare Funktion:
$f(x) = mx + t$ (Grad 1)
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (Grad 2)
Graph ist eine Parabel.



3 Geraden und Ebenen

3.1 Geraden

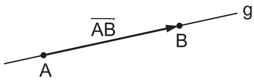
Eine Gerade kann beschrieben werden durch eine Gleichung der Form:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u};\ r \in \mathbb{R}$ (Parametergleichung)

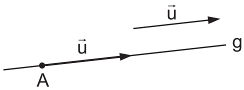
Dabei heißt A Stützpunkt und $\vec{u}$ Richtungsvektor der Geraden.

Eine Gerade g wird eindeutig bestimmt durch

- zwei Punkte A und B:
  g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB};\ r \in \mathbb{R}$



- einen Punkt A und einen Vektor $\vec{u}$:
  g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u};\ r \in \mathbb{R}$



Die Gerade g sei durch die Punkte A(–1 | 6 | 2) und B(5 | 0 | 5) festgelegt. Untersuchen Sie, ob der Punkt P(11 | –6 | 8) auf der Geraden g liegt.

Aufstellen der Geradengleichung:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB};\ r \in \mathbb{R}$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

Oder mit vereinfachtem Richtungsvektor:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor von P in die Gleichung von g einsetzen (Punktprobe):

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = -1 + 2s & \Leftrightarrow \quad 12 = 2s \quad \Rightarrow \quad s = 6 \\ -6 = 6 - 2s & \Leftrightarrow \quad -12 = -2s \quad \Rightarrow \quad s = 6 \\ 8 = 2 + s & \Rightarrow \quad s = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $P \in g$ (P liegt auf der Geraden g.)

4 Zufallsgrößen

4.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** oder Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zufallsgröße die möglichen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise
Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:
Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2$

Schritt 2:
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Formel von Seite 62 ermittelt werden:

$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$

$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}09$