

Abitur

**MEHR
ERFAHREN**

Mathematik

Gymnasium

Sachsen

Das musst du können:

STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften	3
2.1 Potenzfunktionen	3
2.2 Ganzrationale Funktionen	4
2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	5
2.4 Natürliche Exponentialfunktion	6
2.5 Entwicklung von Funktionen	7
2.6 Vielfachheit von Nullstellen	9
2.7 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	10
3 Gebrochenrationale Funktionen	11
3.1 Nullstellen und Polstellen	11
3.2 Grenzwerte und Asymptoten	12
4 Ableitung	16
4.1 Bedeutung der Ableitung	16
4.2 Ableitungen der Grundfunktionen	16
4.3 Ableitungsregeln	17
4.4 Tangente	18
5 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	19
5.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	19
5.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	22
5.3 Ortskurven	25
5.4 Extremwertaufgaben	26
5.5 Bestimmung von Funktionsgleichungen	28

6	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	30
6.1	Stammfunktion	30
6.2	Unbestimmtes Integral	31
7	Bestimmtes Integral und Flächenberechnungen	32
7.1	Bestimmtes Integral	32
7.2	Flächenberechnungen	33
8	Weitere Anwendungen des Integrals	37
8.1	Rekonstruierter Bestand	37
8.2	Volumen von Rotationskörpern	37
8.3	Bogenlänge	38

Analytische Geometrie

1	Lineare Gleichungssysteme	39
2	Vektoren	40
2.1	Rechnen mit Vektoren	40
2.2	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	41
2.3	Skalarprodukt	41
2.4	Vektor- bzw. Kreuzprodukt	42
3	Geraden und Ebenen	43
3.1	Geraden	43
3.2	Ebenen in Parameterform	45
3.3	Ebenen in Normalen- bzw. Koordinatenform	46
3.4	Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform	47
3.5	Hesse'sche Normalenform	48
4	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	49
4.1	Lage zweier Geraden	49
4.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	50
4.3	Lage zweier Ebenen	51
4.4	Schnittwinkel	53

5	Abstände zwischen geometrischen Objekten	54
5.1	Abstand zu einer Ebene	54
5.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	55
5.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	57
6	Spiegelungen	58

Stochastik

1	Ereignisse	59
2	Wahrscheinlichkeitsberechnungen	61
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	61
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	62
2.3	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	63
2.4	Stochastische Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit	65
3	Urnenmodelle	68
3.1	Anzahl der Möglichkeiten	68
3.2	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	69
4	Zufallsgrößen	71
4.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	71
4.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	72
4.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	74
5	Testen von Hypothesen	77
6	Normalverteilung	81
6.1	Normalverteilte Zufallsgrößen	81
6.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	83
	Stichwortverzeichnis	85

Inhalte, die nur für den **Leistungskurs** relevant sind:

- S. 25/26: Kapitel 5.3 (Ortskurven)
- S. 31: Lineare Substitution
- S. 36: Unbegrenzte Flächen
- S. 37: Kapitel 8.2 (Volumen von Rotationskörpern)
- S. 38: Kapitel 8.3 (Bogenlänge)
- S. 41: Kapitel 2.2 (Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren)
- S. 48: Kapitel 3.5 (Hesse'sche Normalenform)
- S. 51/52: Kapitel 4.2 (Lage zweier Ebenen)
- S. 54: Abstand Gerade – Ebene und Abstand Ebene – Ebene
- S. 55/56: Kapitel 5.2 (Abstand eines Punktes zu einer Geraden)
- S. 57: Kapitel 5.3 (Abstand zweier windschiefer Geraden)
- S. 66: Bedingte Wahrscheinlichkeit
- S. 67: Satz von Bayes
- S. 81–83: Kapitel 6 (Normalverteilung)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im Buch ist genau gekennzeichnet, welche Inhalte nur für den LK wichtig sind. Alle anderen Themen sind für GK und LK prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben und Lernvideos finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 540021V)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 540038V)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 94009V)

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Sachsen, Mathematik LK (Bestell-Nr. 145000)
- Abiturprüfung Sachsen, Mathematik GK (Bestell-Nr. 145100)

2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

2.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:

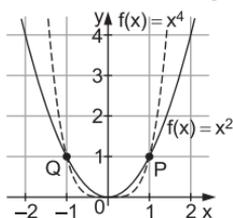
$$f: x \mapsto x^r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

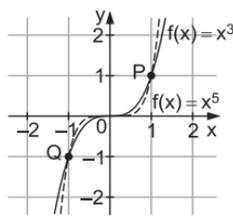
- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
 Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$ Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$
 Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

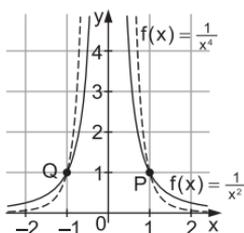
Parabeln: n gerade; $W_f = \mathbb{R}_0^+$



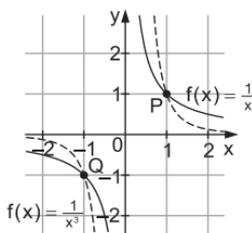
n ungerade; $W_f = \mathbb{R}$



Hyperbeln: n gerade; $W_f = \mathbb{R}^+$



n ungerade; $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Wurzelfunktion

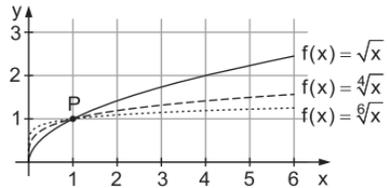
Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

$$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (n\text{-te Wurzelfunktion})$$

$$\text{Definitionsmenge: } D_f = \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{Wertemenge: } W_f = \mathbb{R}_0^+$$

1. G_f verläuft durch $P(1 | 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x=0$
3. Je größer n , desto
 - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
 - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

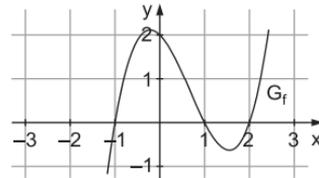
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.6).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstellen bei $x=2$,
 $x=-1$ und $x=1$

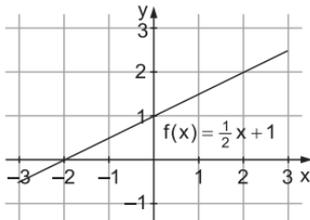


Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

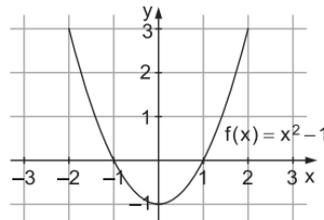
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.



3 Geraden und Ebenen

3.1 Geraden

Eine Gerade kann beschrieben werden durch eine Gleichung der Form:

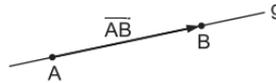
$$g: \vec{x} = \overline{OA} + r \cdot \vec{u}; \quad r \in \mathbb{R} \quad (\text{Parametergleichung})$$

Dabei heißt A Stützpunkt und \vec{u} Richtungsvektor der Geraden.

Eine Gerade g wird eindeutig bestimmt durch

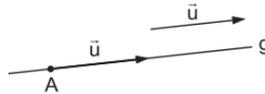
- zwei Punkte A und B:

$$g: \vec{x} = \overline{OA} + r \cdot \overline{AB}; \quad r \in \mathbb{R}$$



- einen Punkt A und einen Vektor \vec{u} :

$$g: \vec{x} = \overline{OA} + r \cdot \vec{u}; \quad r \in \mathbb{R}$$



Die Gerade g sei durch die Punkte $A(-1 | 6 | 2)$ und $B(5 | 0 | 5)$ festgelegt. Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(11 | -6 | 8)$ auf der Geraden g liegt.

Aufstellen der Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \overline{OA} + r \cdot \overline{AB}; \quad r \in \mathbb{R}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

Oder mit vereinfachtem Richtungsvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor von P in die Gleichung von g einsetzen (Punktprobe):

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = -1 + 2s & \Leftrightarrow & 12 = 2s & \Rightarrow & s = 6 \\ -6 = 6 - 2s & \Leftrightarrow & -12 = -2s & \Rightarrow & s = 6 \\ 8 = 2 + s & \Rightarrow & s = 6 & & \end{cases}$$

$\Rightarrow P \in g$ (P liegt auf der Geraden g .)



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK