ABITUR

Prüfungsaufg

MEHR ERFAHREN

Mathematik

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

STARK

Inhalt

Vorwort
Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der Prüfung I
2 Inhalte und Schwerpunktthemen II
3 Leistungsanforderungen und Bewertung III
4 Hinweise zur Dokumentation IV
5 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung V
6 Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern XII
7 Weiterführende Informationen XV

Einführung in den Rechner TI-Nspire

1 Grundlegendes 1
2 Algebraisches 2
3 Arbeit mit Graphen 4
4 Listen und Folgen 7
5 Regression 8
6 Stochastik 9
7 Analytische Geometrie 10
8 Analysis 11
9 Systematisches Probieren 12

Abiturprüfung 2011

Prüfungsteil A0 2011-1
Prüfungsteil A ohne CAS 2011-8
Prüfungsteil B ohne CAS 2011-28
Prüfungsteil A mit CAS 2011-40
Prüfungsteil B mit CAS 2011-60

Abiturprüfung 2012

Prüfungsteil A0 2012-1
Prüfungsteil A ohne CAS 2012-8
Prüfungsteil B ohne CAS 2012-26
Prüfungsteil A mit CAS 2012-39
Prüfungsteil B mit CAS 2012-58

Abiturprüfung 2013

Prüfungsteil A0 2013-1
Prüfungsteil A ohne CAS 2013-8
Prüfungsteil B ohne CAS 2013-26
Prüfungsteil A mit CAS 2013-39
Prüfungsteil B mit CAS 2013-65

Übungsaufgaben für die länderübergreifend gestellten Aufgaben im Prüfungsteil B0

Aufgaben Ü-1
Hinweise und Tipps Ü-2
Lösungen Ü-3

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autoren der Übungsaufgaben und der Lösungen der Abituraufgaben:

2011 – 2013: Holger Lohöfener, Brüel, und Mario Poethke, Schwerin
Übungsaufgaben: Peter Bunzel

Vorwort

Liebe Abiturientinnen, liebe Abiturienten,

mit dem vorliegenden Buch geben wir Ihnen Anleitung und Unterstützung bei der **Vorbereitung** auf die für Sie so wichtige Prüfung, das **Abitur**.

Damit diese Vorbereitung optimal verläuft, finden Sie in diesem Buch alle **Prüfungsaufgaben der Jahrgänge 2011 bis 2013**, die mit freundlicher Genehmigung durch das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern abgedruckt werden dürfen. Eine eigene Aufgabenserie für die länderübergreifend gestellten Aufgaben zeigt Ihnen, was auf Sie im hilfsmittelfreien Prüfungsteil B0 zukommt. Genaue Informationen und wertvolle Hinweise über die Struktur der Prüfung erfahren Sie in dem Abschnitt **„Hinweise und Tipps zum Zentralabitur“**. Dort und vor allem in einer eigenen **Einführung für den Rechner TI-Nspire** erhalten Sie ausführlich Ratschläge zum Umgang mit dem CAS-Rechner in der Prüfung. Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2016 vom Ministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Alle Aufgaben sind mit ausführlichen und **schülergerechten Lösungen** dargestellt. Außerdem enthält das Buch viele fachliche und methodische Hinweise zum Finden möglichst effektiver Lösungswege und zur Vermeidung von Fehlern. Weiter finden Sie bei allen Aufgaben zusätzliche **„Hinweise und Tipps“** zu jeder Teilaufgabe, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen. Diese „Hinweise und Tipps“ liefern Denkanstöße zur Lösung, sie sind durch eine graue Raute markiert und nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet.

Durch das Bearbeiten vieler Prüfungsaufgaben gewinnen Sie einerseits einen Eindruck von Inhalt, Struktur, Umfang und Schwierigkeitsgrad der Prüfung und andererseits zunehmende Sicherheit, sodass die Abiturprüfung für Sie keine unangenehmen Überraschungen bereithalten wird. Beginnen Sie allerdings rechtzeitig mit der Vorbereitung auf die Prüfung.

Das **Stichwortverzeichnis** ermöglicht es Ihnen zudem, wichtige Fachbegriffe und die dazugehörenden Aufgabenstellungen schnell zu finden, sodass Sie einzelne Themen gezielt üben und bearbeiten können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Buch und alles Gute für das anstehende Abitur, nicht nur im Fach Mathematik.

Holger Lohöfener und Mario Poethke

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Das schriftliche Abitur im Fach Mathematik wird in Mecklenburg-Vorpommern entsprechend den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ (EPA) durchgeführt. Die inhaltlichen Vorgaben ergeben sich aus dem Kerncurriculum für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe bzw. den derzeit gültigen Rahmenplänen für Gymnasien und Fachgymnasien. Die zentral gestellten Aufgaben werden im Auftrag des Kultusministeriums durch die Mitglieder der Aufgabenkommission erarbeitet.

Der Aufbau der Prüfungsaufgaben

Seit dem Jahr 2008 wird die schriftliche Abiturprüfung in einer neuen Struktur geschrieben. Dabei erhalten Sie als teilnehmende Schüler alle eine gemeinsame Arbeit A. Wenn Sie die Prüfung mit erhöhtem Anforderungsniveau ablegen, erhalten Sie anstelle der Aufgabe A0 die Aufgabe B0 und danach zusätzlich einen weiteren Aufgabenteil B.

Prüfungsteil ohne Hilfsmittel
Geprüft werden fachliche Inhalte aus den Stoffgebieten Analysis, Analytische Geometrie und Vektorrechnung sowie Stochastik. In der **Aufgabe A0** bzw. **B0** sollen grundlegende Kompetenzen und Kenntnisse nachgewiesen werden. Die einzelnen Teilaufgaben sind wenig komplex und weitgehend unabhängig voneinander. Die Aufgabenstellungen befinden sich auf einem gesonderten Arbeitsblatt. Die Aufgaben des Arbeitsblattes B0 werden dabei aus einem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder Bayern, Hamburg, Sachsen, Niedersachsen, Schleswig-Holstein und Mecklenburg-Vorpommern ausgewählt.
Für die Lösung der Aufgabe A0 bzw. B0 sind **keine Hilfsmittel** (Tafelwerk, Taschenrechner bzw. CAS) zugelassen. Anforderungen an das Rechnen ohne Hilfsmittel beschränken sich auf überschaubare Zahlen und Strukturen.

Prüfungsteil A
Nach der Abgabe des Arbeitsblatts A0 bzw. B0 erhalten Sie die weiteren Prüfungsaufgaben. Die Fragestellungen in den **Aufgaben A1, A2 und A3** sind teilweise komplex. Sie können inhaltlich jeweils einem, aber auch mehreren Stoffgebieten zugeordnet werden. Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei auszuwählen** und zu bearbeiten. Hilfsmittel (Tafelwerk, Taschenrechner bzw. CAS) sind zugelassen.

Prüfungsteil B
Geprüft werden fachliche Inhalte aus den Stoffgebieten Analysis, Analytische Geometrie und Vektorrechnung sowie Stochastik. Die Fragestellungen in den **Aufgaben B1 und B2** sind teilweise komplex. Sie können inhaltlich unabhängige Fortsetzungen oder Ergänzungen der Aufgaben A1, A2 und A3 sein, aber auch vollkommen andere Schwerpunkte enthalten. Von den Aufgaben B1 und B2 ist **eine auszuwählen** und zu lösen. Hilfsmittel (Tafelwerk, Taschenrechner bzw. CAS) sind zugelassen.

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil A0 bzw. B0 stehen Ihnen genau 45 Minuten zur Verfügung. Nach dem Erhalt der weiteren Aufgaben A1, A2 und A3 sowie gegebenenfalls der Aufgaben B1 und B2 wird allen Prüfungsteilnehmern eine Zeit von 30 Minuten für die Aufgabenauswahl gewährt.

Für den Teil A beträgt die Bearbeitungszeit 195 Minuten.
Für den Teil B beträgt die Bearbeitungszeit 60 Minuten.

Insgesamt ergibt sich eine Bearbeitungszeit von 240 Minuten zuzüglich einer Einlesezeit von 30 Minuten, bzw. eine Bearbeitungszeit von 300 Minuten zuzüglich einer Einlesezeit von 30 Minuten, falls Sie die Prüfung mit erhöhtem Anforderungsniveau ablegen.

Zugelassene Hilfsmittel

Die für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik **zugelassenen Hilfsmittel** sind **Wörterbücher der deutschen Rechtschreibung, Taschenrechner** bzw. **Taschenrechner mit CAS**, die im Unterricht verwendete **Formelsammlung** (Tafelwerk) sowie die **Schreib- und Zeichengeräte**, die im Fach Mathematik Anwendung finden. Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen gehören zur Abiturarbeit und dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

2 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die für Sie wesentlichen Schwerpunktthemen stichpunktartig für die zentrale schriftliche Abiturprüfung aufgeführt. Gegebenenfalls kann diese Übersicht durch Vorabhinweise für einzelne Prüfungsjahrgänge konkretisiert werden:

Analysis

Folgen und Reihen
- Darstellungsmöglichkeiten für Folgen
- Monotonieuntersuchungen
- arithmetische und geometrische Folgen
- Partialsummenfolgen
- Grenzwertbegriff
- Grenzwertsätze
- Konvergenzuntersuchungen

Grenzwert einer Funktion und Stetigkeit
- Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle und im Unendlichen (Asymptoten, Polstellen, Lücken), Grenzwertsätze
- Stetigkeit als kennzeichnende Eigenschaft vieler Funktionen (lokal, global, Untersuchung auf Stetigkeit)

Differenzialrechnung
- Lokale Differenzierbarkeit (Änderungsverhalten von Funktionen, Tangentenproblem, Differenzenquotient, Differenzialquotient)
- globale Differenzierbarkeit und Ableitungsfunktion (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)
- Ableitungsregeln
- höhere Ableitungen (geometrische Zusammenhänge zwischen den Graphen von f, f', f'' und f''')
- Anwendungen der Differenzialrechnung bei der Untersuchung von Funktionen und ihrer Graphen (notwendige und hinreichende Kriterien für Monotonie, Krümmung, Extrema und Wendepunkte, Extremwertprobleme)

- Rekonstruktion von Funktionen
- Regression mit CAS
- Modellierung inner- und außermathematischer Sachverhalte (Physik, Technik, Humanwissenschaft, Wachstums- und Zerfallsprozesse)

Integralrechnung
- Integralbegriff (Stammfunktion und unbestimmtes Integral)
- Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen
- Bestimmtes Integral (Approximation von Flächeninhalten durch Ober- und Untersummen, Abgrenzung vom Flächeninhalt, Eigenschaften des bestimmten Integrals, Berechnung bestimmter Integrale, inhaltliches Erfassen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung)
- Anwendung der Integralrechnung (Flächenberechnung, Volumenberechnung, Bogenlänge eines Kurvenstückes, Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern)

Analytische Geometrie und Vektorrechnung
- Grundlagen der Koordinatengeometrie in der Ebene
- Vektorbegriff; Operationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, Skalarprodukt, Vektorprodukt)
- Punkte und Geraden im Raum (Parametergleichung, Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden und zwischen Geraden, Darstellung von Geraden im Koordinatensystem, Schnittwinkel von Geraden, Abstandsprobleme)
- Ebenen (Parametergleichung und parameterfreie Formen der Ebenengleichungen, Lagebeziehungen zwischen Punkten und Ebenen, Geraden und Ebenen sowie zwischen zwei Ebenen, Winkel zwischen Geraden und Ebenen und zwischen Ebenen, Abstandsprobleme, Flächenberechnungen)
- Kreise (Gleichungen, Lagebeziehungen)

Stochastik
- Wahrscheinlichkeitsbegriff und deren Berechnung
- Kombinatorik
- Binomialverteilung
- Grundprobleme der beurteilenden Statistik (Stichproben, Kenngrößen einer statistischen Erhebung, Aufstellen und Testen von Hypothesen bei binomialverteilten Zufallsgrößen, Fehler 1. und 2. Art)

3 Leistungsanforderungen und Bewertung

In die Bewertung geht zunächst einmal die **fachliche Richtigkeit** und **Vollständigkeit** ein. Ebenso gilt, dass die Lösungen, Erläuterungen und Erklärungen, die Bestandteil jeder Abiturarbeit sind, in einer **sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form** darzustellen sind. Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei
- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungen,
- vollständiger Lösung einer weiteren Wahlaufgabe.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Verstößen gegen mathematische Korrektheit und äußere Form abgezogen werden.
Die Lösungswege müssen für die Korrektur stets nachvollziehbar sein. Das bedeutet, speziell bei der Verwendung der CAS-Rechner, dass das Anfertigen grafischer Darstellungen, das Niederschreiben von Gleichungen, Umformungsschritten etc. wichtige Elemente für die Dokumentation von Lösungen bleiben. Ein Lösungsweg kann gegebenenfalls auch mit

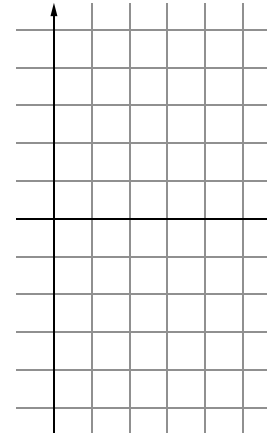
Mathematik (Mecklenburg-Vorpommern): Abiturprüfung 2013
Prüfungsteil A0 – Pflichtaufgaben ohne Rechenhilfsmittel

1 Analysis

1.1 Gegeben ist eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = 2 \cdot n - 5$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Geben Sie die ersten fünf Folgenglieder an und stellen Sie diese grafisch dar.

Begründen Sie, dass die Zahlenfolge monoton steigend ist.



1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Nullstellen von f.

Bestimmen Sie den Anstieg des Graphen an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse im Intervall [1; 2] und der Gerade mit der Gleichung $x = 2$ eingeschlossen wird.

1.3 Von einer Funktion f sind folgende Eigenschaften gegeben:
f ist für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.
f ist für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Begründen Sie, dass f keine lokalen Extrema besitzt.

1.4 Von einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades sind folgende Eigenschaften bekannt:
(1) Nullstellen von f sind 2 und 5.
(2) Der Hochpunkt des Graphen ist H(1 | 4).

Geben Sie ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen an, das die Bestimmung einer Gleichung der Funktion f eindeutig ermöglicht.

Hinweis: Das Gleichungssystem muss nicht gelöst werden.

2 Analytische Geometrie

2.1 Gegeben ist ein Viereck ABCD mit den Eckpunkten A(1 | –3 | 4), B(5 | 0 | 5), C(6 | –2 | 7) und D(2 | –5 | 6).

Zeigen Sie, dass ABCD ein Rechteck ist.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von ABCD.

2.2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Prüfen Sie die Aussagen und begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

A: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander.

B: Der Betrag des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$ ist unabhängig von t.

3 Stochastik

In einer Urne befinden sich sechs rote und vier grüne Kugeln.
Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen zufällig gezogen.

Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es wurden genau zwei grüne Kugeln gezogen.

B: Höchstens eine rote Kugel wurde gezogen.

Formulieren Sie das Gegenereignis zum Ereignis C.

C: Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

- Setzen Sie für n die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 ein.
- Beschriften Sie bei der grafischen Darstellung auch die Koordinatenachsen.
- Eine Zahlenfolge ist monoton steigend, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder der Zahlenfolge größer oder gleich null ist.

Teilaufgabe 1.2

- Verwenden Sie zur Nullstellenberechnung die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.
- Den Anstieg eines Graphen erhält man mithilfe der ersten Ableitung.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt mit einem bestimmten Integral.

Teilaufgabe 1.3

- Was passiert mit dem Vorzeichen der Ableitung in der Umgebung einer Extremstelle?

Teilaufgabe 1.4

- Aus jeder der beiden Eigenschaften erhalten Sie zwei Gleichungen.

Teilaufgabe 2.1

- In einem Rechteck sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel. Außerdem sind alle Innenwinkel rechte Winkel.
- Die Rechtwinkligkeit kann mit dem Skalarprodukt untersucht werden.
- Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird bestimmt durch Länge mal Breite.

Teilaufgabe 2.2

- Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ und den Betrag des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$.

Teilaufgabe 3

- Das Baumdiagramm hat zwei Stufen. Beachten Sie, dass ohne Zurücklegen gezogen wird.
- Verwenden Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten die Pfadregeln.

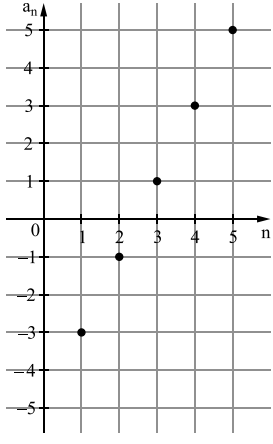
Lösung

1 Analysis

1.1 Angabe der Glieder der Zahlenfolge

Für die Glieder der Zahlenfolge (a_n) mit der Gleichung $a_n = 2 \cdot n - 5$ ergibt sich somit:
$a_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$ und $a_5 = 5$

Grafische Darstellung



Begründung der Monotonie

Um die Monotonie der Zahlenfolge zu begründen, gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Variante:

Eine Zahlenfolge ist monoton steigend, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder der Zahlenfolge größer oder gleich null ist, d. h.:

$a_{n+1} - a_n \geq 0$

Für die Differenz ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2 \cdot (n+1) - 5 - (2n - 5) \\ &= 2n + 2 - 5 - 2n + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Da die Differenz größer als null ist, ist die Zahlenfolge monoton steigend.

2. Variante:

Die Zahlenfolge kann auch als spezielle lineare Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2x - 5$ mit $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$ interpretiert werden.
Da der Anstieg m der linearen Funktion f den Wert zwei hat und m somit größer als null ist, ist die lineare Funktion monoton steigend. Da die lineare Funktion monoton steigend ist, ist auch die Zahlenfolge monoton steigend.

3. Variante:

Es soll gezeigt werden, dass es sich bei der Zahlenfolge um eine arithmetische Zahlenfolge mit der allgemeinen Gleichung $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ handelt. Ist der Parameter d größer als null, so ist die Zahlenfolge monoton steigend.

$a_n = 2n - 5$ | einfügen einer Null $(-2 + 2)$

$a_n = 2n - 2 + 2 - 5$ | ausklammern und zusammenfassen

$a_n = 2 \cdot (n - 1) - 3$ | Term sortieren

$a_n = -3 + (n - 1) \cdot 2$

Dabei sind $a_1 = -3$ und $d = 2$.

Da der Wert von d größer als null ist, ist die Zahlenfolge monoton steigend.

1.2 **Nullstellen**

Um die Nullstellen zu berechnen, wird der Funktionsterm von f gleich null gesetzt und nach x aufgelöst:

$f(x) = 0$

$0 = -3x^2 + 12x - 9$ | $: (-3)$

$0 = x^2 - 4x + 3$ | Lösungsformel für quadratische Gleichungen: $p = -4,\ q = 3$

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1;2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$$

$x_1 = 1;\quad x_2 = 3$

Man erhält die Nullstellen $\underline{\underline{x_1 = 1}}$ und $\underline{\underline{x_2 = 3}}$.

Anstieg

Um den Anstieg des Graphen der Funktion f zu bestimmen, wird zunächst die erste Ableitung ermittelt:

$f(x) = -3x^2 + 12x - 9$

$f'(x) = -6x + 12$

Durch Einsetzen des x-Wertes in die erste Ableitung der Funktion f erhält man den Anstieg des Graphen der Funktion an dieser Stelle:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -6 \cdot \frac{1}{2} + 12 = -3 + 12 = \underline{\underline{9}}$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ den Anstieg 9.

Flächeninhalt

Die Fläche A wird vom Graphen von f, der x-Achse und der Gerade $x = 2$ vollständig eingeschlossen.

Der Inhalt der Fläche wird mit dem bestimmten Integral im Intervall [1; 2] berechnet.

$$A = \int_1^2 (-3x^2 + 12x - 9)\,dx$$ | Stammfunktion F erstellen

$$= \left[-x^3 + 6x^2 - 9x\right]_1^2$$ | F(b) – F(a)

$= (-2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2) - (-1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1)$

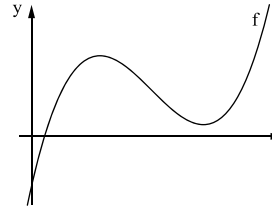
$= -8 + 24 - 18 - (-1 + 6 - 9)$

$\underline{\underline{A = 2}}$

Der Inhalt der Fläche beträgt 2.

1.3 **Begründung**

Eine (stückweise streng monotone) Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, wenn die Ableitungsfunktion f' in einer Umgebung von x_0 von $f'(x) > 0$ zu $f'(x) < 0$ (bei einem Maximum) oder von $f'(x) < 0$ zu $f'(x) > 0$ (bei einem Minimum) wechselt (siehe nebenstehende Abbildung).



Da die Funktion f laut Aufgabenstellung im gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend sein soll (es gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x mit $x \in \mathbb{R}$), kann es keine Stelle x mit $f'(x) < 0$ geben.

Die Funktion hat kein lokales Extremum.

Alternative Begründung: Ohne Verwendung der Ableitung

Eine Funktion f heißt für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, wenn für alle x_a und x_b mit $x_a < x_b$ aus dem Definitionsbereich der Funktion f gilt:

$f(x_a) < f(x_b)$

Es wird nun gezeigt, dass die Funktion f aufgrund der streng wachsenden Monotonie kein lokales Minimum und kein lokales Maximum haben kann.

Angenommen, die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.
So gibt es ein x_1 aus der Umgebung von x_0 mit $x_1 < x_0$, aber wegen des angenommen Minimums an der Stelle x_0 gilt für die Funktionswerte:

$f(x_1) > f(x_0)$

Dies widerspricht der streng wachsenden Monotonie-Eigenschaft der Funktion f.
Die Funktion f hat kein lokales Minimum.

Angenommen, die Funktion f besitzt stattdessen an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.
So gibt es ein x_1 aus der Umgebung von x_0 mit $x_0 < x_1$, aber wegen des angenommen Maximums an der Stelle x_0 gilt für die Funktionswerte:

$f(x_0) > f(x_1)$

Dies widerspricht der streng wachsenden Monotonie-Eigenschaft der Funktion f.
Die Funktion f hat kein lokales Maximum.

Somit ist gezeigt, dass die Funktion f kein lokales Extremum besitzt.

1.4 **Gleichungssystem**

Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Da in der Eigenschaft (2) von einem Hochpunkt geredet wird, wird auch die erste Ableitung $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ benötigt.
Die Eigenschaft (1) „Nullstellen von f sind 2 und 5." wird mathematisch in $f(2) = 0$ und $f(5) = 0$ übertragen (siehe Gleichungen I und II).
In der Eigenschaft (2) sind die Informationen „Punkt H mit den Koordinaten $H(1 \mid 4)$" und „Punkt H ist Hochpunkt des Graphen" enthalten. Diese Informationen werden übertragen in $f(1) = 4$ und $f'(1) = 0$ (siehe Gleichungen III und IV).

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

I $f(2) = 0$
II $f(5) = 0$
III $f(1) = 4$
IV $f'(1) = 0$

© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK