NEUES ABITUR

Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Das musst du können.

STARK

Inhalt

Analytische Geometrie

Stochastik

Nur für den Unterricht auf erhöhtem Anforderungsniveau relevante Inhalte

Analysis

S. 8:	Abschnitt 2.2 Natürliche Logarithmusfunktion
S. 10:	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion
S. 11:	Ableitung von $f(x) = \ln(x)$
S. 12:	Kettenregel
S. 21–22:	Abschnitt 4.4 Umkehrfunktion
S. 22–24:	Abschnitt 4.5 Funktionenscharen
S. 26:	Unbestimmtes Integral $\int \frac{1}{x}\,dx$
S. 27:	Abschnitt 5.3 Integrationsverfahren
S. 31–32:	Abschnitt 6.3 Uneigentliches Integral
S. 32–33:	Abschnitt 6.4 Mittelwert- und Volumenberechnung

Analytische Geometrie

S. 54–56:	Abschnitt 6.4 Lage zweier Ebenen
S. 57–60:	Kapitel 7 Abstände zwischen geometrischen Objekten
S. 61:	Kapitel 8 Spiegelungen

Stochastik

S. 69:	Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes
S. 77–80:	Kapitel 4 Testen von Hypothesen
S. 81–84:	Kapitel 5 Normalverteilung

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung.

Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Zusätzlich werden **Hinweise und Tipps** für den Einsatz des modularen Mathematik-Systems **(MMS)** gegeben.

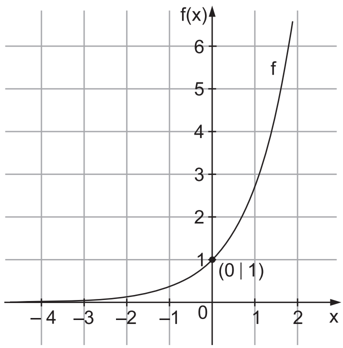
  Diese werden durch einen Taschenrechner gekennzeichnet.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im Buch ist genau gekennzeichnet, welche Inhalte **nur für den Unterricht auf erhöhtem Anforderungsniveau (eA)** wichtig sind. Alle anderen Themen sind sowohl für den Unterricht **auf grundlegendem als auch auf erhöhtem Anforderungsniveau** relevant. Diese Kennzeichnung basiert auf den Bildungsstandards der KMK und muss nicht mit Ihrem bundeslandspezifischen Lehrplan übereinstimmen.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
STARK Verlag

2 Weitere Funktionen

2.1 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion hat den Term $f(x) = e^x$.
- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
  Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$
  Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



Bemerkung: 0^+ bedeutet, dass sich die Werte null nähern und positiv sind.

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1)\cdot e^x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x+1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & x = -1 \end{aligned}$$

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$.
   Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle ln 2 und bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

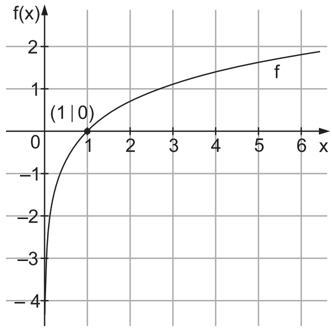
$$f(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + 1}{e^{\ln 2}} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 + \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 1 + „e^{-\infty}“ = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 + \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = 1 + „e^{+\infty}“ = +\infty$$

2.2 Natürliche Logarithmusfunktion (nur eA)

- Die natürliche Logarithmusfunktion hat den Term $f(x) = \ln x$.
- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
  Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Die ln-Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$



Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x) = \ln(2x - 3)$ an den Rändern des maximalen Definitionsbereichs.

Die ln-Funktion ist nur für positive Argumente definiert:

$$2x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} \ln(2x - 3) = „\ln(0^+)“ = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(2x - 3) = „\ln(+\infty)“ = +\infty$$

2.3 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Exponentielle Wachstumsfunktion: $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$
Exponentielle Zerfallsfunktion: $N(x) = N_0 \cdot e^{-k \cdot x}$

Bedeutung der Parameter bzw. Werte:

N_0: Startwert für $x = 0$; $N_0 > 0$
x: Zeit ab einem bestimmten Startpunkt; $x \geq 0$
k: Wachstums- bzw. Zerfallskonstante; $k > 0$
N(x): Wert nach der Zeit x

Eine Tomatenstaude hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm. Nach 30 Tagen ist sie schon 14 cm hoch.
Das Wachstum der Staude lässt sich in den ersten zwei Monaten näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit der Gleichung $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$ (x in Tagen, N(x) in Zentimetern) beschreiben.
Bestimmen Sie N_0 und k rechnerisch.

Informationen aus dem Text: $N(0) = 8,\ N(30) = 14$

Berechnung von N_0: $N(0) = N_0 \cdot e^{k \cdot 0} = N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = 8$

Berechnung von k: $N(30) = 8 \cdot e^{k \cdot 30}$

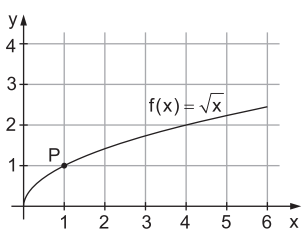
$$\begin{aligned} &\Rightarrow & 8 \cdot e^{k \cdot 30} &= 14 \\ &\Leftrightarrow & e^{k \cdot 30} &= \tfrac{14}{8} \qquad \big| \ln \\ &\Leftrightarrow & k \cdot 30 &= \ln\left(\tfrac{14}{8}\right) \\ &\Leftrightarrow & k &= \tfrac{1}{30} \cdot \ln\left(\tfrac{14}{8}\right) \\ &\Leftrightarrow & k &\approx 0{,}0187 \end{aligned}$$

Die Wachstumsfunktion besitzt die Gleichung:
$N(x) = 8 \cdot e^{0{,}0187 \cdot x}$

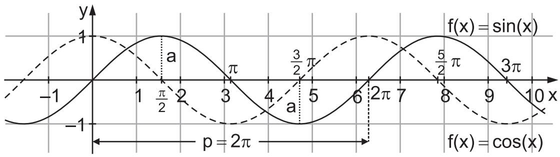
Bemerkung: Durch den Zusatz „rechnerisch“ in der Aufgabenstellung muss in der Lösung sowohl der Ansatz als auch der Rechenweg mit den einzelnen Berechnungen dokumentiert werden.

2.4 Wurzelfunktion

- Die Wurzelfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{x}$.
- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
  Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$
- Die Wurzelfunktion hat eine Nullstelle bei $x = 0$.
- Der Graph der Wurzelfunktion verläuft im I. Quadranten und durch den Punkt $P(1 \mid 1)$.



2.5 Sinus- und Kosinusfunktion



- Die Sinus- und die Kosinusfunktion haben die Funktionsgleichungen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$.
- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
  Wertebereich: $\mathbb{W}_f = [-1; 1]$
- Nullstellen:
  $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots)$
  $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots)$

Wegen $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ entsteht der Graph der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion durch Verschieben „nach links" um $\frac{\pi}{2}$.

Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion (nur eA)

Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion können verschoben und gestreckt oder gestaucht werden. Diese Vorgänge geben die Parameter a, b, c und d in den Funktionsgleichungen der **allgemeinen Sinus-** bzw. **Kosinusfunktion** an:
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$

a: bestimmt die Amplitude ($\triangleq$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$")
b: bestimmt die Periode ($\triangleq$ „eine Schwingung"), $p = \left|\frac{2\pi}{b}\right|$
c: Verschiebung längs x-Achse (Phasenverschiebung)
d: Verschiebung längs y-Achse

Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{W}_f = [-|a| + d; |a| + d]$