

NEUES ABITUR

Abitur **MEHR
ERFAHREN**

Mathematik
Gymnasium

Das musst du können.

STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1 Ganzrationale Funktionen und ihre Eigenschaften	1
1.1 Definition	1
1.2 Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen	2
1.3 Vielfachheit von Nullstellen	2
1.4 Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems)	4
1.5 Entwicklung von Funktionen	5
2 Weitere Funktionen	7
2.1 Natürliche Exponentialfunktion	7
2.2 Natürliche Logarithmusfunktion	8
2.3 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	8
2.4 Wurzelfunktion	9
2.5 Sinus- und Kosinusfunktion	10
3 Ableitung	11
3.1 Die Ableitung	11
3.2 Ableitungsregeln	12
4 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	13
4.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	13
4.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	16
4.3 Extremwertaufgaben	19
4.4 Umkehrfunktion	21
4.5 Funktionenscharen	22
5 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	25
5.1 Stammfunktion	25
5.2 Unbestimmtes Integral	26
5.3 Integrationsverfahren	27
6 Bestimmtes Integral, Flächen- und Volumenberechnung	28
6.1 Bestimmtes Integral	28
6.2 Flächenberechnung	29

6.3 Uneigentliches Integral	31
6.4 Mittelwert- und Volumenberechnung	32
6.5 Rekonstruktion von Beständen	33

Analytische Geometrie

1 Lineare Gleichungssysteme	34
1.1 Lösung linearer Gleichungssysteme	34
1.2 Lösung unterbestimmter Gleichungssysteme	35
1.3 Lösung überbestimmter Gleichungssysteme	36
2 Punkte im Koordinatensystem	37
2.1 Punkte im Raum	37
2.2 Abstand zwischen zwei Punkten	37
3 Vektoren	38
3.1 Rechnen mit Vektoren	38
3.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	39
3.3 Skalarprodukt und Vektor- bzw. Kreuzprodukt	39
4 Geraden	41
4.1 Parameterform einer Geraden	41
4.2 Halbgeraden und Strecken	41
5 Ebenen	43
5.1 Parameterform einer Ebene	43
5.2 Normalenform/Koordinatenform einer Ebene	44
5.3 Umwandlung zwischen Parameterform und Normalenform/Koordinatenform	45
6 Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	48
6.1 Lage eines Punktes zu einer Fläche	48
6.2 Lage zweier Geraden	49
6.3 Lage einer Geraden zu einer Ebene	51
6.4 Lage zweier Ebenen	54
7 Abstände zwischen geometrischen Objekten	57
7.1 Abstand zu einer Ebene	57
7.2 Abstand eines Punktes zu einer Geraden	59
8 Spiegelungen	61

Stochastik

1 Grundlagen	62
2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen	63
2.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	63
2.2 Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	63
2.3 Baumdiagramm	65
2.4 Vierfeldertafel	66
2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	67
3 Zufallsgrößen	70
3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	70
3.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	71
3.3 Binomialverteilte Zufallsgrößen	73
4 Testen von Hypothesen	77
5 Normalverteilung	81
5.1 Annäherung der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung	81
5.2 Normalverteilte Zufallsgrößen	82
Stichwortverzeichnis	85

Nur für den Unterricht auf erhöhtem Anforderungsniveau relevante Inhalte

Analysis

- S. 8: Abschnitt 2.2 Natürliche Logarithmusfunktion
- S. 10: Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion
- S. 11: Ableitung von $f(x) = \ln(x)$
- S. 12: Kettenregel
- S. 21–22: Abschnitt 4.4 Umkehrfunktion
- S. 22–24: Abschnitt 4.5 Funktionenschar
- S. 26: Unbestimmtes Integral $\int \frac{1}{x} dx$
- S. 27: Abschnitt 5.3 Integrationsverfahren
- S. 31–32: Abschnitt 6.3 Uneigentliches Integral
- S. 32–33: Abschnitt 6.4 Mittelwert- und Volumenberechnung

Analytische Geometrie

- S. 54–56: Abschnitt 6.4 Lage zweier Ebenen
- S. 57–60: Kapitel 7 Abstände zwischen geometrischen Objekten
- S. 61: Kapitel 8 Spiegelungen

Stochastik


- S. 69: Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes
- S. 77–80: Kapitel 4 Testen von Hypothesen
- S. 81–84: Kapitel 5 Normalverteilung

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie sowie Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung.

Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Zusätzlich werden **Hinweise und Tipps** für den Einsatz des modularen Mathematik-Systems (MMS) gegeben.

Diese werden durch einen Taschenrechner  gekennzeichnet.

- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im Buch ist genau gekennzeichnet, welche Inhalte **nur für den Unterricht auf erhöhtem Anforderungsniveau (eA)** wichtig sind. Alle anderen Themen sind sowohl für den Unterricht **auf grundlegendem als auch auf erhöhtem Anforderungsniveau** relevant. Diese Kennzeichnung basiert auf den Bildungsstandards der KMK und muss nicht mit Ihrem bundeslandspezifischen Lehrplan übereinstimmen.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

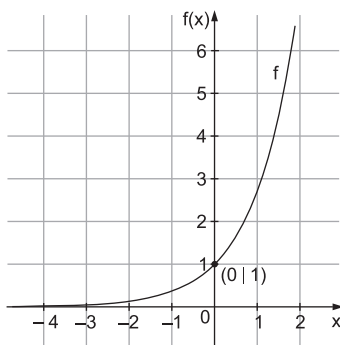
2 Weitere Funktionen

2.1 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion hat den Term $f(x) = e^x$.
- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$
Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Bemerkung: 0^+ bedeutet, dass sich die Werte null nähern und positiv sind.

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

2. Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$.

Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle $\ln 2$ und bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

$$f(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + 1}{e^{\ln 2}} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 1 + „e^{-\infty}“ = 1$$

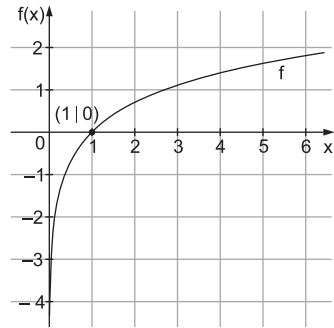
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 1 + „e^{+\infty}“ = +\infty$$

2.2 Natürliche Logarithmusfunktion (nur eA)

- Die natürliche Logarithmusfunktion hat den Term $f(x) = \ln x$.
- Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}^+$
Wertebereich: $W_f = \mathbb{R}$
- Die ln-Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$



Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x) = \ln(2x - 3)$ an den Rändern des maximalen Definitionsbereichs.

Die ln-Funktion ist nur für positive Argumente definiert:

$$2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow D_f =]\frac{3}{2}; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \ln(2x - 3) = \text{„ln}(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x - 3) = \text{„ln}(+\infty) = +\infty$$

2.3 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Exponentielle Wachstumsfunktion: $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$

Exponentielle Zerfallsfunktion: $N(x) = N_0 \cdot e^{-k \cdot x}$

Bedeutung der Parameter bzw. Werte:

N_0 : Startwert für $x=0$; $N_0 > 0$

x : Zeit ab einem bestimmten Startpunkt; $x \geq 0$

k : Wachstums- bzw. Zerfallskonstante; $k > 0$

$N(x)$: Wert nach der Zeit x



Eine Tomatenstaude hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm. Nach 30 Tagen ist sie schon 14 cm hoch.

Das Wachstum der Staude lässt sich in den ersten zwei Monaten näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit der Gleichung $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$ (x in Tagen, $N(x)$ in Zentimetern) beschreiben. Bestimmen Sie N_0 und k rechnerisch.

Informationen aus dem Text: $N(0) = 8$, $N(30) = 14$

Berechnung von N_0 : $N(0) = N_0 \cdot e^{k \cdot 0} = N_0 \Rightarrow N_0 = 8$

Berechnung von k : $N(30) = 8 \cdot e^{k \cdot 30}$

$$\Rightarrow 8 \cdot e^{k \cdot 30} = 14$$

$$\Leftrightarrow e^{k \cdot 30} = \frac{14}{8} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow k \cdot 30 = \ln\left(\frac{14}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{14}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow k \approx 0,0187$$

Die Wachstumsfunktion besitzt die Gleichung:

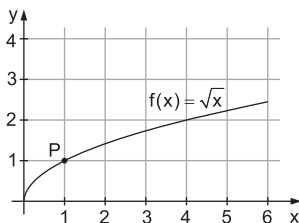
$$N(x) = 8 \cdot e^{0,0187 \cdot x}$$



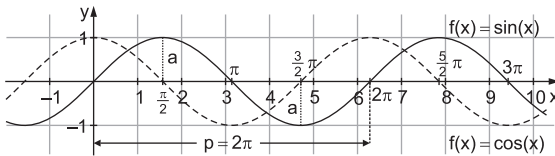
Bemerkung: Durch den Zusatz „rechnerisch“ in der Aufgabenstellung muss in der Lösung sowohl der Ansatz als auch der Rechenweg mit den einzelnen Berechnungen dokumentiert werden.

2.4 Wurzelfunktion

- Die Wurzelfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{x}$.
- Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}_0^+$
Wertebereich: $W_f = \mathbb{R}_0^+$
- Die Wurzelfunktion hat eine Nullstelle bei $x=0$.
- Der Graph der Wurzelfunktion verläuft im I. Quadranten und durch den Punkt $P(1 | 1)$.



2.5 Sinus- und Kosinusfunktion



- Die Sinus- und die Kosinusfunktion haben die Funktionsgleichungen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$.
- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{W}_f = [-1; 1]$
- Nullstellen:
 $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots)$
 $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots)$

Wegen $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ entsteht der Graph der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion durch Verschieben „nach links“ um $\frac{\pi}{2}$.

Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion (nur eA)

Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion können verschoben und gestreckt oder gestaucht werden. Diese Vorgänge geben die Parameter a , b , c und d in den Funktionsgleichungen der **allgemeinen Sinus-** bzw. **Kosinusfunktion** an:

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$

- bestimmt die Amplitude ($\hat{=}$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$ “)
- bestimmt die Periode ($\hat{=}$ „eine Schwingung“), $p = \left| \frac{2\pi}{b} \right|$
- Verschiebung längs x -Achse (Phasenverschiebung)
- Verschiebung längs y -Achse

Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Wertebereich: $\mathbb{W}_f = [-|a| + d; |a| + d]$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK