Mathem[...]

MEHR ERFAHREN

Auf einen [...]

Funktionen

Prüfung[...]

STARK

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Heft bietet Ihnen einen **kompakten Überblick** über die in der Schule behandelten **Funktionsklassen** und dient als nützlicher Baustein bei der Vorbereitung auf Klausuren und die Abiturprüfung.

Das erste Kapitel listet alle mathematischen Begriffe auf, die üblicherweise in Aufgabenstellungen verwendet werden.

Im zweiten Kapitel ist jede Funktionsklasse im praktischen Doppelseitenformat dargestellt. **Auf einen Blick** erfassen Sie so alle Charakteristika des jeweiligen Funktionstyps oder verwenden die Doppelseite als Hilfestellung bei einer vorgegebenen Aufgabe.

Die jeweils linke Seite bietet

- eine Vorstellung des Funktionstyps, zu der auch ein exemplarischer Funktionsgraph gehört (**Auf einen Blick**).
- eine Aufstellung der **Grundeigenschaften** der jeweiligen Funktionsklasse, in der Definitions- und Wertebereich, Limeswerte und Asymptoten, Symmetrie und Nullstellen, Ableitung und Monotonie sowie Stamm- und Umkehrfunktion aufgeführt sind.

Die jeweils rechte Seite gliedert sich in

- eine Auflistung **spezieller Eigenschaften**,
- eine **Beispielaufgabe**, die sich mit für die Funktionsklasse typischen Aufgabenstellungen befasst und ausführlich gelöst wird,
- eine Zusammenstellung von Punkten, die bei der Lösung von Aufgaben beachtet werden sollten, um typischen Fehlern vorzubeugen (**Worauf Sie achten sollten …**).

Eine **Formelsammlung** rundet die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten dieses Hefts ab.

Viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Heft!

Sybille Reimann

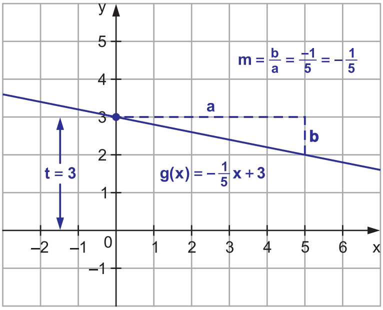
Sybille Reimann

Auf einen Blick

Der Name sagt es bereits: Der Graph einer **linearen Funktion** ist eine **Gerade**.

$f(x) = mx + t$

Festgelegt ist die Gerade durch ihren **Schnittpunkt mit der y-Achse** (Achsenabschnitt t) und ein rechtwinkliges **Steigungsdreieck**. Das Verhältnis zwischen der senkrechten Kathete b und der waagrechten Kathete a (jeweils **mit** Vorzeichen ablesen!) entspricht der **Geradensteigung**: $m = \frac{b}{a}$

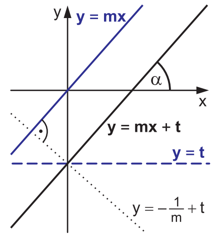


Grundeigenschaften

Funktion	$f(x) = mx + t$ $\quad$ m = Steigung, t = y-Achsenabschnitt
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Verhalten an den Rändern	für $m > 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ für $m < 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
waagrechte Asymptoten	keine
senkrechte Asymptoten	keine
Wertebereich	für $m \neq 0$: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ für $m = 0$: $\mathbb{W} = \{t\}$
Symmetrie zum KOSY	für $m = 0$: achsensymmetrisch zur y-Achse für $t = 0$: punktsymmetrisch zum Ursprung für $m, t \neq 0$: keine
Nullstellen	für $m \neq 0$: genau eine Nullstelle $x_N = -\frac{t}{m}$
Ableitung	$f'(x) = m$
Monotonie	für $m > 0$: streng monoton steigend für $m < 0$: streng monoton fallend
Stammfunktion	$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + tx + C$
Umkehrfunktion	für $m \neq 0$: $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{t}{m}$ mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ für $m = 0$: keine

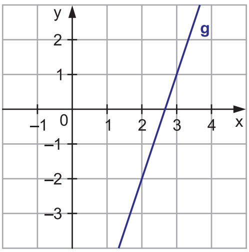
Spezielle Eigenschaften

- Wenn **$m = 0$**, so ist die Gerade eine **Parallele zur x-Achse**.
- Wenn **$t = 0$**, so handelt es sich um eine **Ursprungsgerade**.
- **Parallele Geraden** besitzen dieselbe Steigung.
- Stehen die Geraden g und h aufeinander **senkrecht**, so gilt $m_h = -\frac{1}{m_g}$. h ist **Normale** zu g.
- Für den **Winkel** α, den die Gerade mit der positiven x-Achse einschließt, gilt: **$\tan\alpha = m$**



Beispielaufgaben

1. Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, indem Sie die benötigten Informationen möglichst genau der Abbildung entnehmen, und berechnen Sie den Winkel α, unter dem die Gerade die x-Achse schneidet.



   Lösung:
   Ablesen in der Abbildung ergibt:
   g verläuft durch die beiden Punkte $(2\,|\,-2)$ und $(3\,|\,1)$.
   Das Steigungsdreieck zwischen $(2\,|\,-2)$ und $(3\,|\,1)$ ergibt:
   $m = \frac{3}{1} = 3$
   Einsetzen von $m = 3$ und $(2\,|\,-2)$ in $g(x) = mx + t$ ergibt:
   $-2 = 3 \cdot 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = -8 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 3x - 8$
   Setzt man $m = 3$ und $(3\,|\,1)$ ein, erhält man ebenso:
   $1 = 3 \cdot 3 + t \quad \Rightarrow \quad t = -8 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 3x - 8$

   Den gesuchten Winkel erhält man mit:
   $\tan\alpha = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx 71{,}6°$

2. Zeigen Sie, dass $t(x) = 4x + 6$ die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ für $x_0 = -1$ ist, und bestimmen Sie die Gleichung der zugehörigen Normalen n(x).

   Lösung:
   Stimmt $m_t = 4$ mit $f'(-1)$ überein?
   $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 6(-1)^2 + 6(-1) + 4 = 4$ $\quad \rightarrow$ Übereinstimmung
   Verlaufen t und f für $x_0 = -1$ durch denselben Punkt?
   $t(-1) = 4(-1) + 6 = 2$ und $f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 5 = 2$ $\quad \rightarrow$ Übereinstimmung
   $\Rightarrow$ t ist die Tangente an den Graphen von f im Kurvenpunkt $(-1\,|\,2)$.
   n muss die Steigung $-\frac{1}{4}$ besitzen und ebenfalls durch $(-1\,|\,2)$ verlaufen:
   $2 = -\frac{1}{4} \cdot (-1) + t \quad \Rightarrow \quad t = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

Worauf Sie achten sollten …

Geraden kommen häufig im Zusammenhang mit anderen Funktionen vor:

- **senkrechte Asymptoten** $x = a$ (*Achtung:* Keine Funktion! [▶ S. 2, *Was ist eine Funktion?*])
- **waagrechte Asymptoten** $y = b$
- **schiefe/schräge Asymptoten** $y = mx + t$ bei gebrochenrationalen Funktionen
- **Tangenten** $y = mx + t$ an den Funktionsgraphen einer Funktion f(x) im Punkt $P(x_0\,|\,f(x_0))$, wobei **$m = f'(x_0)$** gilt