MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Mathematik – Fit für die Oberstufe

Mit 28 Lernvideos zu Algebra, Stochastik und Geometrie

STARK

Inhalt

Autor und Autorin: Eberhard Endres und Sybille Reimann

Auf **MySTARK** finden Sie **Lernvideos** zu ausgewählten Themen und Aufgaben.
Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Mathematik in der gymnasialen Oberstufe baut auf den Inhalten der Unter- und Mittelstufe auf. Ein sicherer Umgang mit grundlegenden Begriffen, Rechenwegen und Lösungsstrategien ist daher eine wichtige Voraussetzung, um den Anforderungen der Oberstufe erfolgreich begegnen zu können.

Dieser Aufgabentrainer unterstützt Sie dabei, grundlegende mathematische Inhalte zu wiederholen, zu festigen und gezielt zu üben. Sie können ihn auf unterschiedliche Weise nutzen:

- Zur umfassenden Wiederholung des Stoffs **vor Beginn der Oberstufe**,
- **während der Oberstufe** zur gezielten Auffrischung einzelner Themen,
- bereits **in den Klassen 5 bis 10**, um zentrale Inhalte zusätzlich zum Unterricht zu üben.

Die Inhalte gliedern sich in die drei Themenbereiche **Algebra**, **Stochastik** und **Geometrie**. Im Einzelnen ist das Buch wie folgt aufgebaut:

- Die **Kapitel** sind so gestaltet, dass Sie selbstständig damit arbeiten können. Sie müssen das Buch nicht von vorne nach hinten durcharbeiten. Die drei Themenbereiche können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Innerhalb der Themengebiete bauen die Unterkapitel inhaltlich aufeinander auf.
- Jedes **Unterkapitel** beginnt mit einer kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Regeln, Begriffe und Definitionen. Daran schließen sich Übungsaufgaben an, mit denen Sie die Inhalte anwenden, festigen und vertiefen können.
- Einzelne Unterkapitel oder Aufgaben sind mit einem **Stern ✳** gekennzeichnet. Dieser weist darauf hin, dass das entsprechende Thema in manchen Bundesländern über den Stoff der Unter- und Mittelstufe hinausgeht. Da diese Inhalte jedoch spätestens in der Oberstufe für alle Bundesländer relevant werden, empfiehlt sich auch die gründliche Bearbeitung dieser Kapitel und Aufgaben.
- Zu ausgewählten Themen und Aufgaben stehen Ihnen **Lernvideos** zur Verfügung. Diese sind auf der Plattform **MySTARK** abrufbar. Den Zugangscode finden Sie vorne in diesem Buch.
- Im Anschluss an die drei Themenbereiche folgen sechs **Tests** zur Lernzielkontrolle: zwei Tests zur Algebra, zwei zur Stochastik, einer zur Geometrie sowie ein abschließender Test mit gemischten Aufgaben aus allen drei Bereichen. Die Tests prüfen jeweils Inhalte aus den gesamten Kapiteln ab. Für jeden Test ist ein Zeitbedarf angegeben. Pro Test können maximal **20 Bewertungseinheiten** erreicht werden. Am Ende jedes Tests ist eine mögliche Zuordnung der erreichten Bewertungseinheiten zu Noten angegeben.

- Spätestens in der schriftlichen Abiturprüfung, häufig aber auch schon in Klausuren in der Oberstufe, werden Ihnen **hilfsmittelfreie Aufgabenteile** begegnen. Um Sie darauf vorzubereiten, enthalten einige Tests Aufgaben, die Sie ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung bearbeiten sollten. Diese Aufgaben erkennen Sie am Symbol des durchgestrichenen Taschenrechners.

- Am Ende des Buches finden Sie ausführliche **Lösungen** zu allen Aufgaben und Tests. Diese dienen nicht nur zur Ergebniskontrolle, sondern helfen Ihnen auch dabei, Lösungswege nachzuvollziehen und eigene Fehler zu erkennen.

Wenn Sie gewissenhaft und kontinuierlich mit diesem Aufgabentrainer arbeiten, sind Sie optimal auf die gymnasiale Oberstufe vorbereitet.

Das Autorenteam und der STARK-Verlag wünscht Ihnen viel Erfolg beim Üben und Wiederholen sowie einen guten Start in die Oberstufe!

1.1 Zahlenmengen, Variablen, Terme

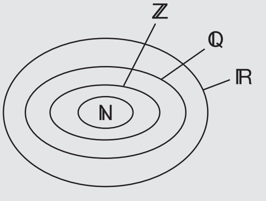
Das musst du wissen!

Zahlenmengen

In der Schulmathematik unterscheidet man vier wichtige Zahlenmengen:

Zahlenmenge	Name	Beispiele	Beschreibung
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	0; 1; 2; 3; 4; 5; …	Zählzahlen mit 0
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	-45; -3; 0; 18; $\frac{55}{-5}$	Natürliche Zahlen und ihre Gegenzahlen (ihr Negatives)
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\frac{3}{5}$; $-7{,}3$; 0; $8{,}\overline{5}$; $-6\frac{3}{4}$	Alle Zahlen, die sich als Quotient einer ganzen Zahl und einer natürlichen Zahl ohne 0 schreiben lassen
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	3,87; $-4{,}7$; π; 0	Zahlen, die sich als endliche oder unendliche Dezimalzahl darstellen lassen

Hinweis: Je nach Konvention ist die 0 in den natürlichen Zahlen enthalten oder nicht. In diesem Buch gehört die 0 zu $\mathbb{N}$.



Die Zahlenmengen, beginnend bei $\mathbb{N}$, sind jeweils in der nächstfolgenden Menge vollständig enthalten: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Reelle Zahlen, die nicht zu den rationalen Zahlen gehören, nennt man **irrationale Zahlen**.

Rechnen mit reellen Zahlen

Neben den vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) gibt es folgende häufig verwendete Rechenoperationen:

- **Potenzierung** (für natürliche Exponenten) ist das wiederholte Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst. Man schreibt dabei z. B. für $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$.
  4 ist die **Basis**, 5 der **Exponent**. Den Ausdruck 4^5 nennt man **Potenz**.
- Der **Betrag einer Zahl** gibt den Abstand der Zahl von der Null an.
  Man schreibt für den Betrag einer Zahl a kurz $|a|$.
- Die **Wurzel** einer nichtnegativen Zahl a ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Man schreibt für die Wurzel einer Zahl a kurz $\sqrt{a}$. Die Zahl oder den Rechenausdruck innerhalb des Wurzelzeichens nennt man **Radikand**.

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten folgende Rechengesetze ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

- **Kommutativgesetz:** In einer Summe (einem Produkt) darf man die Summanden (Faktoren) beliebig vertauschen: $a + b = b + a$ bzw. $a \cdot b = b \cdot a$
- **Assoziativgesetz:** In einer Summe (einem Produkt) darf man die Summanden (Faktoren) in beliebiger Reihenfolge addieren (multiplizieren):
  $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ bzw. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c = abc$

- **Distributivgesetz:** Ein Term wird mit einer Summe multipliziert, indem man den Term mit jedem Summanden multipliziert und diese Produkte addiert:
  $\mathbf{a} \cdot (b + c) = \mathbf{a} \cdot b + \mathbf{a} \cdot c$
- **Vorfahrtsregeln:** Es werden zunächst Klammern und Wurzeln, dann Potenzen, dann Produkte und Quotienten, dann Summen und Differenzen berechnet. Rechenausdrücke mit ineinander geschachtelten Klammern oder Wurzeln werden **von innen nach außen** vereinfacht. Rechenausdrücke mit mehreren gleichrangigen Rechenoperationen werden **von links nach rechts** berechnet.

Variablen und Terme

Wichtige Begriffe im Umgang mit Variablen und Termen:

Begriff	Beschreibung
Variablen	Platzhalter für Zahlen; werden durch Buchstaben oder indizierte Buchstaben dargestellt
Terme	Rechenausdrücke, die durch sinnvolle Verknüpfung von Zahlen, Variablen und Rechenzeichen gebildet werden
Grundmenge G	Diejenige Zahlmenge, die man für die Belegung der Variablen zugrunde legt; meist die reellen Zahlen
Maximale Definitionsmenge D_{max}	Enthält alle Zahlen aus der Grundmenge, für die der Term definiert ist
Polynome	Terme, die aus einer Summe von Potenzen einer einzigen Variable mit natürlichen Exponenten bestehen
Grad eines Polynoms	Größter Exponent der Polynomvariable
Bruchterme	Terme mit mindestens einem Nenner, in dem mindestens eine Variable vorhanden ist; Zahlen, für die der Nenner den Wert 0 annimmt, gehören **nicht** zu D_{max}.

Hängt ein Term T von den Variablen a, b, … ab, schreibt man kurz T(a; b; …). Zwei Terme nennt man gleichwertig oder **äquivalent**, wenn sie bei gleicher Belegung der Variablen mit Zahlenwerten stets denselben Wert annehmen.

> Beim Rechnen mit Termen gelten die gleichen Rechengesetze wie beim Rechnen mit reellen Zahlen. Für Bruchterme gelten zusätzlich die Bruchrechenregeln.

Bestehen die beiden Faktoren eines Produkts aus Summen, wird **jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors** multipliziert und die Produkte werden addiert. Man nennt dies **Ausmultiplizieren**.

Die drei **binomischen Formeln** sollte man auswendig kennen:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Das Umwandeln einer Summe in ein Produkt nennt man **Faktorisieren**.

Aufgaben

Zahlenmengen

1 Geben Sie an, zu welchen Zahlmengen die folgenden Zahlen gehören.
$7;\ -0{,}2;\ \frac{3}{4};\ -\frac{8}{2};\ \sqrt{16};\ -9{,}\overline{5};\ \sqrt{7};\ 4\pi;\ 0;\ 10\frac{1}{3};\ 7{,}111;\ -8;\ \sqrt{5\pi};\ 200\,\%;\ \sqrt{-3}$

2 Geben Sie jeweils fünf Zahlen an, die

a zu $\mathbb{Z}$, aber nicht zu $\mathbb{N}$ gehören.

b zu $\mathbb{Q}$, aber nicht zu $\mathbb{Z}$ gehören.

c zu $\mathbb{R}$, aber nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören.

Rechnen mit reellen Zahlen

3 Berechnen Sie die Rechenausdrücke.

a $27-13+45-17$

b $3\cdot(-9)+(-4)\cdot 3$

c $-(3-5\cdot 2)-(7+4)$

d $8+\frac{4}{5}\cdot\left(-3-\frac{3}{4}\right)$

e $(3-5:7)-6:(-3)$

f $2+(-3+4\cdot 3)\cdot 2$

g $27:(-3):(-5):(-9)$

h $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\left(-\frac{3}{20}\right)$

i $3\cdot(4-(-5))+2\cdot 3$

j $3\cdot 2-(4-9)\cdot 8+2\cdot 5$

k $-7\cdot\left(\frac{3}{4}-(-3)\cdot\frac{1}{2}\right)$

l $8-7\cdot(3+3^2)+5\cdot 8$

4 Vereinfachen Sie die Wurzeln.

a $\sqrt{25}$

b $\sqrt{0{,}25}$

c $\sqrt{4900}$

d $\sqrt{36\cdot 49}$

5 Vereinfachen Sie die Rechenausdrücke.

a $|-7{,}09|$

b $|-2|-|-8|$

c $|\sqrt{9}|$

d $|-8+3|$

6 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

a $3-5\cdot(-2+9)-(5-(-4)\cdot 3)$

b $[7-5\cdot(3-2\cdot 5)-9]\cdot 6-3\cdot 2$

c $(27+8\cdot(-2-1))\cdot(-4)$

d $(-2)^3+(-1)^4-7\cdot(-3+5)^2$

e $13-[5-3\cdot(-2)]\cdot(-4+2\cdot 3)$

f $8+7\cdot(-5+4\cdot[6-2\cdot(-5+7)])$

Variablen und Terme

7 Welche der Ausdrücke sind Terme?

abc; 3z8; $3z^8$; $\frac{6}{u7}$; Auto; $7-+3a$; $6a-3+b$

8 Welche Terme sind Polynome? Geben Sie gegebenenfalls den Grad des Polynoms an.

a $7x^3+5x^2$ **b** $3+4x^6$

c $\frac{3}{x}+1$ **d** $9x^5-7y^3\sqrt{9x^5+4x^4+x^2-1}$

9 Berechnen Sie, welche Werte die Terme jeweils annehmen, wenn man a durch 5, b durch –1 und c durch –2 ersetzt.

a $2ab-c$ **b** $3\cdot(a-b)-ab$

c $(a+b)\cdot a-bc$ **d** $abc-3a(b-c)-2bc$

10 Ersetzen Sie in nachfolgenden Termen a durch –1 und x jeweils der Reihe nach durch –2; –1; 0; 1; 2 (sofern dies möglich ist).

a $a\cdot x^2$ **b** $\frac{2a}{x^3}$

c $x^3-2ax+a$ **d** $\frac{x-a}{2x+a}$

e $ax^2-a+\frac{2}{ax}$ **f** $x^4-2ax^2+a^2$

g $3a^2-2xy$ **h** $\sqrt{2x}+3a$

11 Geben Sie an, für welche Belegung von x der Term seinen kleinstmöglichen Wert annimmt.
Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe müssen Sie sich klarmachen, wie groß das Quadrat einer Zahl mindestens ist.

a $(x-5)^2$ **b** $4\cdot(x+3)^4$

c x^2+4 **d** $(x^4-16)^2$

e $\sqrt{x^4+1}$ **f** $\frac{(x-3)^2}{(x+6)^4}$

12 Ein Streamingdienst bietet zwei verschiedene Abonnement-Modelle an. Im Basismodell beträgt die monatliche Grundgebühr 6 €. Jeder weitere ausgeliehene Film kostet 1,50 €. Das Premiummodell kostet 18 € pro Monat, dafür sind alle ausgeliehenen Filme inklusive.

a Stellen Sie einen Term für die monatlichen Kosten des Basismodells in Abhängigkeit von der Anzahl der ausgeliehenen Filme auf.

b Bestimmen Sie, wie viele Filme man monatlich ausleihen muss, damit sich das Premiummodell gegenüber dem Basismodell preislich lohnt.

13 Fassen Sie die Terme so weit wie möglich zusammen.

a $2a - 5b - 4a + 2b$

b $6x - 3y + 8x - 2y + 4x$

c $-3a - 2z + 3y - 3ay + 4a + 2z$

d $4ab + 3ac - 5ab + 4bc - 3ac - ab$

e $0{,}3r + 1{,}2s^2 - 0{,}5r - 1{,}8s \cdot 2s$

f $1{,}2ab - 3{,}8bc + 0{,}2ac - 0{,}8ab - 2ac$

g $7f^2y - 3yz^3 - 2fy + 4f^2y + 3yf$

h $4x^4 - 2x^2 + x - 3x^4 + 3x^2 - 4x$

i $7x \cdot y^2 + 3x^2 \cdot y + 5xy^2 - 2xyx$

14 Vereinfachen Sie die Produkte.

a $7x \cdot (3y \cdot 2x)$

b $4x \cdot (-2xy)$

c $(-5xy) \cdot (2xy^2) \cdot 2y$

d $(-6xy) \cdot (-2y) \cdot (3xz) \cdot (-5x)$

e $-(3x \cdot y) \cdot (-4) \cdot 2xy^2 \cdot (-xy)$

f $-(-x \cdot 2y)^2 \cdot (-xy) \cdot (-x \cdot 3y)^2$

15 Klammern Sie den Term $-6x^2$ aus.

a $24x^3y - 30x^2y^2$

b $120x^2y^2 - 60x^3 + 6x^2 - 54x^5y^2$

16 Klammern Sie möglichst viel aus.

a $4x^3 - 6x^2$

b $16x^2y^3 - 24x^3y^2$

c $12a^2b^3c - 18b \cdot 2a^2b^2c^2$

d $3x^5 - 12x^3y + 9x^2y^3 + 6x^4y$

e $7x^2y - 5xy^2 + 2xy^3 - 6x^2y^2$

f $35x\sqrt{y} - 7y\sqrt{x} + 21\sqrt{xy}$

2.3 Absolute und relative Häufigkeit

Das musst du wissen!

Wird ein Zufallsexperiment n-mal ausgeführt und tritt dabei das Ergebnis ω k-mal auf, so bezeichnet man k als die **absolute Häufigkeit H des Ergebnisses ω**, kurz: **$H(\omega)=k$**

Das Verhältnis aus der absoluten Häufigkeit k eines Ergebnisses ω und der Anzahl n der Versuche nennt man die **relative Häufigkeit h des Ergebnisses ω**, kurz: **$h(\omega)=\frac{k}{n}$**

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- $H \in \mathbb{N}_0$ und $h \in \mathbb{Q}$; $0 \leq h \leq 1$
- Ist A ein Ereignis eines Zufallsexperiments mit $A=\{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_r\}$, so ergibt sich die absolute Häufigkeit H des Ereignisses A zu:
  $H(A)=H(\omega_1)+H(\omega_2)+H(\omega_3)+\ldots+H(\omega_r)$
  Die relative Häufigkeit ergibt sich analog:
  $h(A)=h(\omega_1)+h(\omega_2)+h(\omega_3)+\ldots+h(\omega_r)=\frac{H(A)}{n}$
- Das unmögliche Ereignis $A=\{\,\}$ kann nicht eintreten: $H(\{\,\})=0 \;\Rightarrow\; h(\{\,\})=0$
- Das sichere Ereignis $A=\Omega$ tritt in allen n Versuchen ein: $H(\Omega)=n \;\Rightarrow\; h(\Omega)=1$
- Die Summe der relativen Häufigkeiten eines Ereignisses und seines Gegenereignisses ergibt 1: $h(A)+h(\overline{A})=1$
- Die absolute Häufigkeit der Vereinigung zweier Ereignisse A und B lässt sich mit dem **Additionssatz** bestimmen: $H(A\cup B)=H(A)+H(B)-H(A\cap B)$
  Dieser gilt analog für relative Häufigkeiten.

Vierfeldertafel

Sind für die Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments zwei Ereignisse A und B definiert, so ist jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ in genau einer der folgenden vier Teilmengen enthalten: $A\cap B$, $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$ oder $\overline{A}\cap\overline{B}$

Die zu dieser Zerlegung gehörenden absoluten Häufigkeiten, die sich bei n-maliger Ausführung ergeben, lassen sich übersichtlich in einer **Vierfeldertafel** darstellen.

Die absoluten Häufigkeiten von A, $\overline{A}$, B und $\overline{B}$ ergeben sich jeweils aus der Summe der entsprechenden Spalten- bzw. Zeilenwerten.

	A	$\overline{A}$	
B	$H(A\cap B)$	$H(\overline{A}\cap B)$	$H(B)$
$\overline{B}$	$H(A\cap\overline{B})$	$H(\overline{A}\cap\overline{B})$	$H(\overline{B})$
	$H(A)$	$H(\overline{A})$	n

Jede Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten lässt sich in eine **Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten** umwandeln, indem die Werte in den Zellen durch die Gesamtzahl n geteilt werden.

Aufgaben

Absolute Häufigkeit

153 Sara kauft Glückwunschkarten, wann immer sie schöne und günstige sieht. Auf diese Weise hat sie schon einen ganzen Karton voll davon angesammelt.
Teilt man Saras Karten in die Kategorien Weihnachten (W), Ostern (O), Geburtstag (G), lustiger Spruch (S) und neutrale Karte (N) ein, so liegen die Karten derzeit in der Reihenfolge

W	W	O	S	N	S	S	N	G	G	N	N	N	S	G
G	G	G	W	W	O	O	O	S	S	G	G	O	S	S
N	N	N	N	S	W	W	W	O	O	G	G	N	N	N
W	W	S	S	S	S	S	S	N	N	O	O	O	G	G
G	G	G	G	S	N	N	N	N	W	W	W	S	G	N

im Karton.

a Fertigen Sie eine Tabelle mit den absoluten Häufigkeiten der verschiedenen Arten der Glückwunschkarten an.

b Saras Freundin hat Geburtstag.
Bestimmen Sie, aus wie vielen passenden Karten Sara auswählen kann, wenn es nicht unbedingt eine Karte mit einer Geburtstagsaufschrift sein muss.

154 Bei der Anmeldung der künftigen Fünftklässler*innen am STARK-Gymnasium wird auch der Wohnort abgefragt. Für das kommende Schuljahr ergibt sich dabei folgende Verteilung:

	Hohenstein	Kirchheim	Lohmen	Rhinow	Ruhleben	Scheinfeld
weiblich	18	17	1	7	26	11
männlich	13	18	3	9	23	9

Lesen Sie aus der Tabelle ab,

a wie viele Neuanmeldungen in die 5. Klasse es gibt.

b wie viele Mädchen angemeldet wurden.

c wie viele der Neuanmeldungen aus Ruhleben kommen.

d wie viele Schülerinnen und Schüler den Schulbus nutzen können, der aus Scheinfeld kommt und über Hohenstein und Lohmen fährt.

Relative Häufigkeit

155 Beim 500-maligen Werfen eines Würfels ergeben sich folgende absolute Häufigkeiten:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
H(Augenzahl)	87	83	71	88	84	

a Berechnen Sie die absolute Häufigkeit der Augenzahl 6.

b Berechnen Sie die relative Häufigkeit
- der Augenzahl 3.
- der Augenzahl 4.
- einer geraden Augenzahl.
- einer primen Augenzahl.
- einer geraden und primen Augenzahl.
- einer geraden oder primen Augenzahl.

156 450 Zuschauer bewerten einen Film auf einer Skala von 1 bis 5. Die Tabelle zeigt die relativen Häufigkeiten der einzelnen Bewertungen:

Video 19

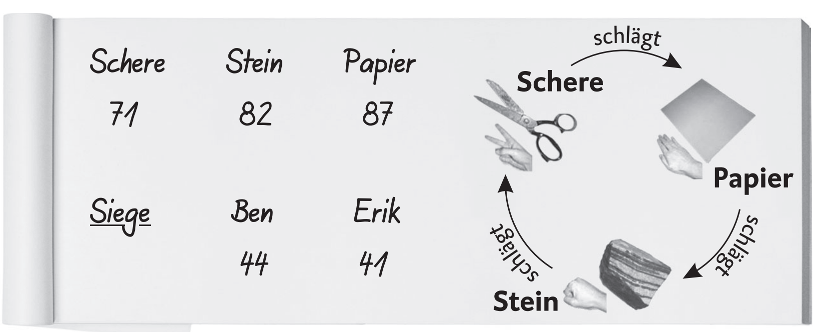
Bewertung	1	2	3	4	5
Relative Häufigkeit	0,08	0,12	0,20	0,32	0,28

a Berechnen Sie die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Bewertungen.

b Bestimmen Sie die Anzahl der Bewertungen, die niedriger als 3 sind.

c Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage korrekt ist: „Der Film erhielt von mehr als der Hälfte der Zuschauer eine Bewertung über 3."

157 Ben und Erik spielen in der Freistunde Schere-Stein-Papier. Alex beobachtet sie dabei und zählt mit. Am Ende der Stunde präsentiert Alex die folgende Übersicht:

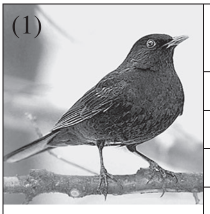


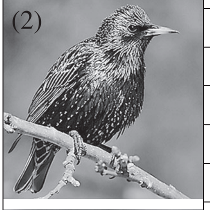
a Geben Sie an, wie oft das Spiel unentschieden ausging.

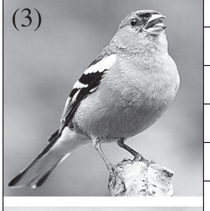
b Berechnen Sie die relative Häufigkeit für „unentschieden".

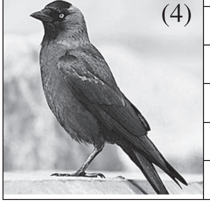
c Bestimmen Sie die relative Häufigkeit für „Papier".

158 Bei der vom NABU (Naturschutzbund Deutschland) durchgeführten Vogelzählung „Stunde der Gartenvögel“ vom 9.–11. Mai 2025 wurden bundesweit 1 130 881 Vögel gezählt. Dabei ergab sich für die 20 häufigsten Vogelarten:


(1)


(2)


(3)


(4)

Rang	Vogelart	Anzahl der Vögel (insgesamt)	Trend
1	Haussperling	170 598	↘
2	Amsel (1)	92 506	↘
3	Kohlmeise	92 239	→
4	Star (2)	81 845	→
5	Blaumeise	67 509	↘
6	Elster	53 988	→
7	Feldsperling	52 964	↘
8	Mauersegler	51 333	↗
9	Ringeltaube	46 124	→
10	Mehlschwalbe	34 016	↗
11	Rotkehlchen	31 305	→
12	Rabenkrähe	26 862	→
13	Grünfink	23 014	→
14	Buchfink (3)	21 185	→
15	Türkentaube	18 401	→
16	Straßentaube	17 272	→
17	Rauchschwalbe	15 444	↗
18	Stieglitz	14 946	→
19	Buntspecht	13 648	↘
20	Dohle (4)	13 191	→

a Bestimmen Sie die relative Häufigkeit des Haussperlings und der Meisen.

b Bestimmen Sie die relative Häufigkeit aller Vogelarten, die es nicht unter die ersten 20 geschafft haben.

c Die Pfeile in der Spalte „Trend“ geben an, ob die Vogelart im Vergleich zum Vorjahr stärker oder schwächer in den Gärten vertreten ist.
Berechnen Sie unter den 20 häufigsten Arten die relative Häufigkeit für eine seltener werdende Vogelart.

d Carmen hat auch an der Vogelzählung teilgenommen und in ihrem Garten 4 Haussperlinge, 5 Amseln, 5 Kohlmeisen, 3 Blaumeisen, 1 Star, 2 Elstern und 2 Rotkehlchen beobachtet.
Als sie die Tabelle betrachtet, kommt sie zu dem Schluss, dass es in ihrem Garten vergleichsweise wenig Haussperlinge, aber viele Rotkehlchen gibt.
Beurteilen Sie, ob Carmen recht hat.

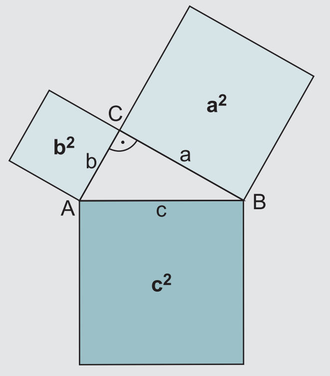
3.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Das musst du wissen!

Satz des Pythagoras

Video 26

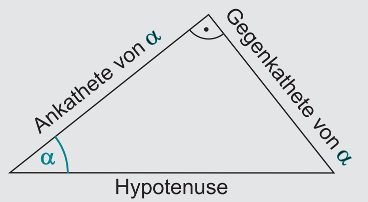
Der **Satz des Pythagoras** besagt:
In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich zur Summe der Quadrate über den Katheten.
Für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gilt:
$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$



Die **Umkehrung** des Satzes gilt ebenso:
Gilt in einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c die Gleichung $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$, so ist das Dreieck rechtwinklig mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c.

Trigonometrie

In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem spitzen Winkel α bezeichnet man
- die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete als **Gegenkathete von α** und
- die am Winkel α anliegende Kathete als **Ankathete von α**.



Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck sind nur abhängig von einem Winkel. Man definiert:
- **Sinus** von α: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$
- **Kosinus** von α: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$
- **Tangens** von α: $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

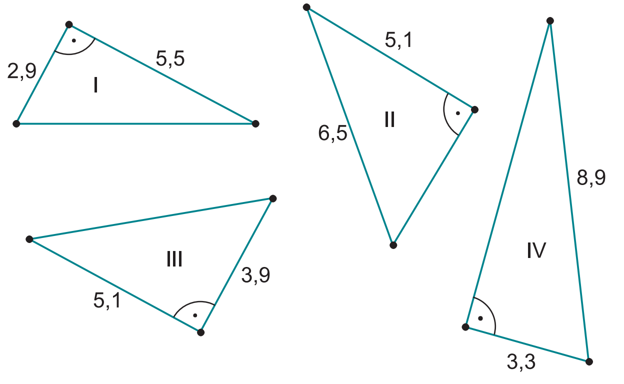
Es gelten die folgenden elementaren Zusammenhänge:
- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ bzw. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
- $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ („trigonometrischer Pythagoras")
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Im rechtwinkligen Dreieck sind Sinus, Kosinus und Tangens nur für Winkel zwischen 0° und 90° definiert. Verallgemeinert lassen sich die trigonometrischen Funktionen sin x, cos x und tan x definieren, wobei sin x und cos x für alle reellen Zahlen definiert sind, tan x nur für x-Werte mit $\cos x \neq 0$.

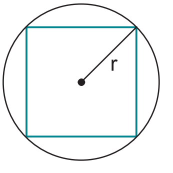
Aufgaben

Satz des Pythagoras

213 Bestimmen Sie die fehlenden Seitenlängen in folgenden rechtwinkligen Dreiecken.



214 Ein Quadrat ist einem Kreis einbeschrieben. Bestimmen Sie das Verhältnis der Umfänge von Kreis und Quadrat.



215 Berechnen Sie die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a.

216 **a** Bestimmen Sie die Länge der Raumdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a.

b Berechnen Sie die Länge der Raumdiagonale eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c.

217 Prüfen Sie, ob ein Dreieck mit den Seitenlängen d, e und f rechtwinklig ist.
Hinweis: Überlegen Sie zuerst, welche der Seiten die Hypotenuse sein muss, falls ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt.

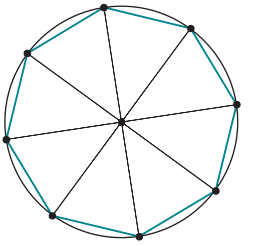
a $d = 7$ cm; $e = 24$ cm; $f = 25$ cm

b $d = 17$ m; $e = 15$ m; $f = 8$ m

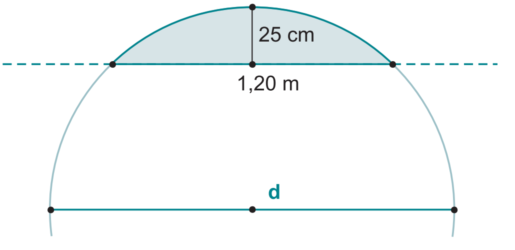
c $d = 10$ cm; $e = 9$ cm; $f = 14$ cm

218 Eine Leiter lehnt an einer Hauswand. Der Abstand der Leiter vom Fuß der Wand beträgt 6 m. Die Leiter ist 10 m lang.
Überprüfen Sie, ob die Leiter bis zu einem Fenster reicht, das sich 8 m über dem Boden befindet.

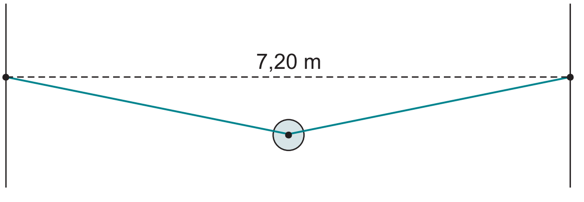
219 Das abgebildete regelmäßige Achteck ist einem Kreis mit Radius 12 cm einbeschrieben. Bestimmen Sie den Umfang des Achtecks.



220 Eine unterirdisch verlegte Kanalisationsröhre mit kreisförmigem Querschnitt ist an einer Stelle teilweise freigelegt worden und ragt 25 cm aus dem Boden heraus. Die Breite des sichtbaren Teils beträgt 1,20 m.
Bestimmen Sie den Durchmesser d dieser Kanalisationsröhre.



221 Eine Straßenlaterne, die in der Mitte zwischen zwei 7,20 m voneinander entfernten Häuserfronten aufgehängt ist, hängt – bedingt durch ihr Eigengewicht – 40 cm durch.



Bestimmen Sie, um wie viel Prozent sich das Spannseil gegenüber der unbelasteten Länge von 7,20 m gedehnt hat.

222 Bei einem Sturm knickt ein 24 m hoher Sendemast in einer bestimmten Höhe so ab, dass seine Spitze in einer Entfernung von 12 m vom Fußpunkt des Sendemastes auf dem Boden auftrifft. Bestimmen Sie die Höhe, in der der Sendemast abgeknickt ist.

Test 3: Stochastik

Inhalte: Ergebnismenge, Ereignisse, Häufigkeiten, Kreisdiagramm, Baumdiagramm

Zeitbedarf: 40 Minuten

3.1 Ein Tetraeder wird zweimal hintereinander geworfen.

a Bestimmen Sie die Ergebnismenge sowie ihre Mächtigkeit. 2 Punkte

b Bestimmen Sie die folgenden Ereignisse:
E_1: „Beim ersten Wurf fällt eine Primzahl."
E_2: „Die Augensumme ist größer als 6."
$E_3 = \overline{E_1} \cup E_2$
$E_4 = E_1 \cap \overline{E_2}$ 4 Punkte

c Beschreiben Sie das Ereignis $E_5 = \overline{E_1 \cup E_2}$ in möglichst einfachen Worten. 2 Punkte

d Stellen Sie E_5 in einem Mengendiagramm dar. 2 Punkte

3.2 In einer Schule wird eine Umfrage unter 250 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Dabei wird erfasst, welches Verkehrsmittel sie überwiegend für den Schulweg nutzen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Fahrrad	Bus	Auto	zu Fuß
75	90	55	30

a Geben Sie die absolute Häufigkeit der Schülerinnen und Schüler an, die nicht mit dem Bus zur Schule kommen. 1 Punkt

b Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Schülerinnen und Schüler, die mit dem Fahrrad oder zu Fuß zur Schule kommen. 1 Punkt

c Fertigen Sie ein Kreisdiagramm an. 3 Punkte

3.3 Ein Bistro bietet mittags neben den Gerichten auf der Karte einen günstigen und schnell servierten „Business Lunch" an. Diesen wählen 83 % der Gäste. Bestellt man den „Business Lunch", muss man sich entscheiden, ob entweder eine Vorspeise oder ein Nachtisch serviert wird. Beim Hauptgericht hat man die Wahl zwischen vegetarisch und nicht vegetarisch. Die Vorspeise wählen 58 %, beim Hauptgericht entscheiden sich 36 % für die nicht vegetarische Option. Von den Gästen, die von der Karte bestellen, wählen 54 % ein vegetarisches Gericht.

a Erstellen Sie das zugehörige Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten. 3 Punkte

b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast ein vegetarisches Hauptgericht wählt. 2 Punkte

20 Punkte

Note	1	2	3	4	5	6
Punkte	20–18	17–15	14–12	11–9	8–5	4–0

5.1 Lösungen zur Algebra

1

„gehört zu"	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
7	ja	ja	ja	ja
$-0{,}2$	nein	nein	ja	ja
$\frac{3}{4}$	nein	nein	ja	ja
$-\frac{8}{2}=-4$	nein	ja	ja	ja
$\sqrt{16}=4$	ja	ja	ja	ja
$-9{,}\overline{5}=-9\frac{5}{9}$	nein	nein	ja	ja
$\sqrt{7}$	nein	nein	nein	ja
4π	nein	nein	nein	ja
0	ja	ja	ja	ja
$10\frac{1}{3}$	nein	nein	ja	ja
7,111	nein	nein	ja	ja
-8	nein	ja	ja	ja
$\sqrt{5\pi}$	nein	nein	nein	ja
$200\,\% = 2$	ja	ja	ja	ja
$\sqrt{-3}$	nein	nein	nein	nein

2 Hier sind jeweils viele Antworten möglich.

a z. B. -3; -7; -22; -200; -999

b z. B. $1{,}2$; $-3{,}8$; $\frac{7}{3}$; $2\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{8}$

c z. B. π; $\sqrt{2}$; $\sqrt{33}$; 9π; $4+\pi$

3 **a** Mögliche Anwendung des Kommutativgesetzes:

$27-13+45-17$ Kommutativgesetz

$=27+45-13-17$ Assoziativgesetz

$=(27+45)+(-13-17)$

$=72+(-30)=72-30=42$

b $\mathbf{3\cdot(-9)}+\mathbf{(-4)\cdot 3}=-27+(-12)=-27-12=-39$

c $-(3-\mathbf{5\cdot 2})-\mathbf{(7+4)}=-(3-10)-11=-(-7)-11=7-11=-4$

d $8+\frac{4}{5}\cdot\left(-3-\frac{3}{4}\right)=8+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{4}-\frac{3}{4}\right)=8+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)=8-\frac{4\cdot 15}{5\cdot 4}=8-3=5$

e $(3-5:7)-6:(-3)=\left(3-\frac{5}{7}\right)+\frac{6}{3}=2\frac{2}{7}+2=4\frac{2}{7}$

f $2+(-3+4\cdot 3)\cdot 2=2+(-3+12)\cdot 2=2+9\cdot 2=2+18=20$

g $27:(-3):(-5):(-9)=-9:(-5):(-9)=\frac{9}{5}:(-9)=-\frac{1}{5}$

h $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\left(-\frac{3}{20}\right)=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 5}-\left(-\frac{4\cdot 3}{20}\right)=\frac{1}{5}-\left(-\frac{12}{20}\right)=\frac{1}{5}+\frac{12}{20}=\frac{4}{20}+\frac{12}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

i $3\cdot(4-(-5))+2\cdot 3=3\cdot(4+5)+2\cdot 3=3\cdot 9+6=27+6=33$

j $3\cdot 2-(4-9)\cdot 8+2\cdot 5=6-(-5)\cdot 8+10=6+40+10=56$

k $-7\cdot\left(\frac{3}{4}-(-3)\cdot\frac{1}{2}\right)=-7\cdot\left(\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=-7\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)=-7\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{4}\right)=-7\cdot\frac{9}{4}=-\frac{63}{4}$

l $8-7\cdot(3+3^2)+5\cdot 8=8-7\cdot(3+9)+40=8-7\cdot 12+40=8-84+40=-36$

4 **a** $\sqrt{25}=5$, da $5^2=25$

b $\sqrt{0,25}=0,5$, da $0,5^2=0,25$

c $\sqrt{4900}=70$, da $70^2=4900$

d $\sqrt{36\cdot 49}=\sqrt{6\cdot 6\cdot 7\cdot 7}=\sqrt{42\cdot 42}=42$

5 **a** $|-7,09|=7,09$

b $|-2|-|-8|=2-8=-6$

c $\left|\sqrt{9}\right|=\sqrt{9}=3$

d $|-8+3|=|-5|=5$

6 **a** $3-5\cdot(-2+9)-(5-(-4)\cdot 3)=3-5\cdot 7-(5+12)=3-35-17=-49$

b $[7-5\cdot(3-2\cdot 5)-9]\cdot 6-3\cdot 2=[7-5\cdot(-7)-9]\cdot 6-6=[7+35-9]\cdot 6-6$
$=33\cdot 6-6=198-6=192$

c $(27+8\cdot(-2-1))\cdot(-4)=(27+8\cdot(-3))\cdot(-4)=(27-24)\cdot(-4)=3\cdot(-4)=-12$

d $(-2)^3+(-1)^4-7\cdot(-3+5)^2=-8+1-7\cdot 2^2=-7-7\cdot 4=-7-28=-35$

e $13-[5-3\cdot(-2)]\cdot(-4+2\cdot 3)=13-[5+6]\cdot(-4+6)=13-11\cdot 2=13-22=-9$

f $8+7\cdot(-5+4\cdot[6-2\cdot(-5+7)])=8+7\cdot(-5+4\cdot[6-2\cdot 2])$
$=8+7\cdot(-5+4\cdot 2)=8+7\cdot 3=8+21=29$

7 Terme: abc; $3z^8$; Auto; $6a-3+b$

Keine Terme: 3z8; $\frac{6}{u7}$; $7-+3a$

8 **a** Der Term ist ein Polynom dritten Grades.

b Der Term ist ein Polynom sechsten Grades.

c Der Term ist kein Polynom, da die Variable x im Nenner steht.

d Der Term ist kein Polynom, da die Variable x unter der Wurzel steht.

9 **a** $2ab-c=\mathbf{2\cdot 5\cdot(-1)}-(-2)=-10+2=-8$

b $3\cdot(a-b)-ab=3\cdot\mathbf{(5-(-1))}-5\cdot(-1)=3\cdot 6+5=23$

c $(a+b)\cdot a-bc=\mathbf{(5+(-1))}\cdot 5-\mathbf{(-1)\cdot(-2)}=\mathbf{4\cdot 5}-2=20-2=18$

d $abc-3a(b-c)-2bc=\mathbf{5\cdot(-1)\cdot(-2)}-\mathbf{3\cdot 5\cdot(-1-(-2))}-2\cdot\mathbf{(-1)\cdot(-2)}$
$=10-\mathbf{15\cdot 1}-\mathbf{2\cdot 2}=10-15-4=-9$

10

	T(–1; x)	x = –2	x = –1	x = 0	x = 1	x = 2
a	$-x^2$	-4	-1	0	-1	-4
b	$\frac{-2}{x^3}$	$\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$	$\frac{-2}{-1}=2$	nicht definiert	$\frac{-2}{1}=-2$	$\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$
c	x^3+2x-1	-13	-4	-1	2	11
d	$\frac{x+1}{2x-1}$	$\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{-1}=-1$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{3}{3}=1$
e	$-x^2+1-\frac{2}{x}$	$-4+1+1$ $=-2$	$-1+1+2$ $=2$	nicht definiert	$-1+1-2$ $=-2$	$-4+1-1$ $=-4$
f	x^4+2x^2+1	25	4	1	4	25
g	$3-2xy$	$3+4y$	$3+2y$	3	$3-2y$	$3-4y$
h	$\sqrt{2x}-3$	nicht definiert	nicht definiert	-3	$\sqrt{2}-3$	$\sqrt{4}-3$ $2-3=-1$

11 Ein quadratischer Term der Form a^2 nimmt dann seinen kleinsten Wert an, wenn das Argument a null ist. Damit ergibt sich:

a $(x-5)^2$ ist für $x=5$ minimal, da der Klammerterm nur für $x=5$ null ist.

b $4\cdot(x+3)^4$ ist für $x=-3$ minimal, da der Klammerterm nur für diesen x-Wert null ergibt. Der gesamte Term nimmt dort den Wert $4\cdot 0=0$ an.

c x^2+4 nimmt für $x=0$ den kleinsten Wert 4 an, weil nur dort $x^2=0$ ist.

d $(x^4 - 16)^2$ nimmt für $x = 2$ und $x = -2$ jeweils den kleinsten Wert null an. Nur für diese x-Werte ist der Klammerterm null und somit das Quadrat dieses Klammerterms minimal.

e $\sqrt{x^4 + 1}$ nimmt für $x = 0$ den kleinsten Wert an, da dort x^4 den kleinstmöglichen Wert annimmt.

f $\frac{(x-3)^2}{(x+6)^4}$ nimmt für $x = 3$ den kleinsten Wert null an, da nur für $x = 3$ der Zähler null wird und der Bruch wegen der geraden Exponenten nie negativ werden kann.

12 a Die Variable x gebe die Anzahl der ausgeliehenen Filme an. Der Term T(x) beschreibt die monatlichen Kosten für das Basismodell in €:
$T(x) = 6 + 1{,}5 \cdot x$

b Das Premiummodell kostet monatlich 18 €.
Durch Einsetzen von verschiedenen x-Werten in den Term aus Teilaufgabe a erhält man jeweils die monatlichen Kosten für das Basismodell in €:
$T(7) = 6 + 1{,}5 \cdot 7 = 16{,}5$
$T(8) = 6 + 1{,}5 \cdot 8 = 18$
$T(9) = 6 + 1{,}5 \cdot 9 = 19{,}5$

Bei 8 ausgeliehenen Filmen kostet das Basismodell genauso viel wie das Premiummodell. Ab 9 ausgeliehenen Filmen lohnt sich das Premiummodell preislich.

Alternative Berechnung:

$$\begin{aligned} 6 + 1{,}5x &= 18 && \mid -6 \\ 1{,}5x &= 12 && \mid : 1{,}5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

13 a

$$\begin{aligned} &2a - 5b - 4a + 2b \\ &= 2a - 4a - 5b + 2b && \text{Kommutativgesetz} \\ &= (2-4) \cdot a + (-5+2) \cdot b && \text{Ausklammern von a und b, um gleichartige Terme zusammenzufassen} \\ &= -2a - 3b \end{aligned}$$

b $6x - 3y + 8x - 2y + 4x = \mathbf{6x + 8x + 4x - 3y - 2y} = 18x - 5y$

c $-3a - 2z + 3y - 3ay + 4a + 2z = \mathbf{-3a + 4a - 2z + 2z} + 3y - 3ay = a + 3y - 3ay$

d $4ab + 3ac - 5ab + 4bc - 3ac - ab$
$= \mathbf{4ab - 5ab - ab + 3ac - 3ac} + 4bc = -2ab + 4bc$

152 **a** Bei jedem Wurf sind sechs Augenzahlen möglich. Es handelt sich um ein Ziehen mit Zurücklegen. Nach dem Zählprinzip ergibt sich damit:
$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6 = 46\,656$

b Ereignis E_1:
Beim ersten Wurf muss die 6 erscheinen, bei allen anderen Würfen ist die Augenzahl beliebig, weshalb alle Augenzahlen von 1 bis 6 infrage kommen.
$|E_1| = 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7\,776$

Ereignis E_2:
Beim ersten Wurf muss die 6 erscheinen, bei allen anderen Würfen darf die 6 nicht mehr erscheinen, weshalb nur noch fünf Augenzahlen (1, 2, 3, 4, 5) möglich sind.
$|E_2| = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3\,125$

Ereignis E_3:
Beim ersten Wurf kann eine der sechs Augenzahlen erscheinen. Beim zweiten Wurf darf diese nicht mehr erscheinen, weshalb nur noch fünf Augenzahlen zur Verfügung stehen. Beim dritten Wurf dürfen die beiden schon gefallenen Augenzahlen nicht mehr erscheinen, weshalb nur noch vier Augenzahlen infrage kommen, usw.
$|E_3| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

153 **a** Die absolute Häufigkeit entspricht jeweils der Anzahl der Karten einer Kategorie:

Karte	W	O	G	S	N
Absolute Häufigkeit	12	10	17	17	19

b Sara kann ihrer Freundin mit einer Geburtstagskarte, einer Karte mit einem lustigen Spruch oder mit einer neutralen Karte gratulieren.

H(passende Karte) = H(G) + H(S) + H(N) = 17 + 17 + 19 = 53

Sara kann also aus 53 Karten auswählen.

154 Die gegebene Tabelle lässt sich durch die entsprechenden Summen erweitern:

	Hohen-stein	Kirch-heim	Lohmen	Rhinow	Ruh-leben	Schein-feld	
weiblich	18	17	1	7	26	11	**80**
männlich	13	18	3	9	23	9	**75**
	31	**35**	**4**	**16**	**49**	**20**	**155**

Aus der erweiterten Tabelle lassen sich ablesen:

a H(Neuanmeldungen) = 155

b H(Mädchen) = 80

c H(Ruhleben) = 49

d H(Schulbus) = H(Scheinfeld) + H(Hohenstein) + H(Lohmen) = 20 + 31 + 4 = 55

155 **a** Der Würfel wird insgesamt 500-mal geworfen. Die Summe der absoluten Häufigkeiten muss daher 500 ergeben. Sei x die absolute Häufigkeit der Augenzahl 6. Dann gilt:
$87+83+71+88+84+x=500 \quad \Leftrightarrow \quad 413+x=500 \quad \Leftrightarrow \quad x=87$

b
- $h(3)=\frac{H(3)}{500}=\frac{71}{500}=0{,}142=14{,}2\,\%$
- $h(4)=\frac{H(4)}{500}=\frac{88}{500}=0{,}176=17{,}6\,\%$
- $h(\text{gerade})=h(\{2;4;6\})=\frac{83+88+87}{500}=\frac{129}{250}=0{,}516=51{,}6\,\%$
- $h(\text{prim})=h(\{2;3;5\})=\frac{83+71+84}{500}=\frac{119}{250}=0{,}476=47{,}6\,\%$
- Das Wort „und“ bedeutet „$\cap$“:
  $h(\text{gerade}\cap\text{prim})=h(2)=\frac{83}{500}=0{,}166=16{,}6\,\%$
- Das Wort „oder“ bedeutet „$\cup$“:
  $h(\text{gerade}\cup\text{prim})=h(\{2;3;4;5;6\})=1-h(1)=1-\frac{87}{500}=0{,}826=82{,}6\,\%$

  Oder mithilfe der Teilaufgaben c, d und e:
  $$h(\text{gerade}\cup\text{prim})=h(\text{gerade})+h(\text{prim})-h(\text{gerade}\cap\text{prim})$$
  $$=0{,}516+0{,}476-0{,}166=0{,}826=82{,}6\,\%$$

156 **a** Die absoluten Häufigkeiten erhält man, indem man die relativen Häufigkeiten mit der Gesamtanzahl der Besucher multipliziert:
$H(\text{Bewertung})=h(\text{Bewertung})\cdot 450$

Insgesamt ergibt sich so:

Bewertung	1	2	3	4	5
H(Bewertung)	36	54	90	144	126

b Niedriger als 3 sind die Bewertungen 1 und 2.
$H(\text{niedriger als }3)=H(\{1;2\})=36+54=90$

Alternative Berechnung:
$H(\{1;2\})=h(\{1;2\})\cdot 450=(0{,}08+0{,}12)\cdot 450=0{,}2\cdot 450=90$

c Eine Bewertung über 3 bedeutet eine Bewertung von 4 oder 5. Für die relative Häufigkeit von 4 oder 5 gilt:
$h(4\text{ oder }5)=h(\{4;5\})=0{,}32+0{,}28=0{,}6=60\,\%$

60 % der Zuschauer haben dem Film eine Bewertung über 3 gegeben.
Die Aussage ist daher korrekt.

157 **a** Insgesamt traten $71+82+87=240$ Figuren (Schere, Stein, Papier) auf. Da sich jeder Spieler pro Runde nur für eine einzige Figur entscheiden kann, haben Ben und Erik 120-mal gespielt.

Von den 120 Spielen insgesamt hat Ben 44 und Erik 41 gewonnen, die restlichen Spiele gingen unentschieden aus.
$120-44-41=35$

Das Spiel ging 35-mal unentschieden aus.

b Da es um die Anzahl der Spiele geht, lautet der Nenner 120.
$h(\text{unentschieden}) = \frac{35}{120} \approx 0{,}2917 = 29{,}17\ \%$

c Da es um die Anzahl der Figuren geht, ist der Nenner 240.
$h(\text{Papier}) = \frac{87}{240} = 0{,}3625 = 36{,}25\ \%$

158 **a** Aus dem Text oberhalb der Tabelle entnimmt man, dass insgesamt 1 130 881 Vögel beobachtet wurden. Damit kennt man den Nenner. Die Anzahl der Haussperlinge lässt sich der Tabelle entnehmen.
$h(\text{Haussperling}) = \frac{170\,598}{1\,130\,881} \approx 0{,}1509 = 15{,}09\ \%$

In der Tabelle sind insgesamt zwei Meisenarten aufgelistet, die Kohlmeise und die Blaumeise.
$h(\text{Meise}) = h(\text{Kohlmeise}) + h(\text{Blaumeise})$
$= \frac{92\,239 + 67\,509}{1\,130\,881} \approx 0{,}1413 = 14{,}13\ \%$

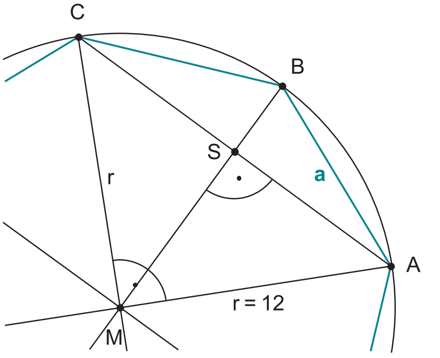
b Addiert man alle in der Tabelle aufgeführten Vögel, ergibt sich:
$170\,598+92\,506+92\,239+81\,845+67\,509+53\,988+52\,964+51\,333+46\,124+34\,016+31\,305+26\,862+23\,014+21\,185+18\,401+17\,272+15\,444+14\,946+13\,648+13\,191=938\,390$

Somit sind $1\,130\,881-938\,390=192\,491$ der insgesamt beobachteten Vögel nicht in der Tabelle aufgeführt.

$h(\text{nicht unter den ersten 20 Vogelarten}) = \frac{192\,491}{1\,130\,881} \approx 0{,}1702 = 17{,}02\ \%$

c Der Nenner muss hier 20 sein, da es um die Anzahl der Pfeile geht.
Eine Vogelart wird seltener, wenn der Pfeil nach unten zeigt. Dies trifft in der Tabelle auf fünf Pfeile zu.
$h(\text{seltener werdende Vogelart}) = \frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\ \%$

219 Gegeben ist der Radius $r = 12$ cm, gesucht ist der Umfang U des regelmäßigen Achtecks. Es gilt $U = 8a$, wobei a die Seitenlänge des Achtecks ist.
Zunächst muss man rechtwinklige Dreiecke finden, in denen sich aus dem Radius $r = 12$ cm weitere Streckenlängen bestimmen lassen.



Hierfür eignet sich das eingezeichnete rechtwinklige Dreieck ACM, in dem zwei Seitenlängen dem Radius entsprechen und somit $|AC|$ bestimmt werden kann:

$$|AC|^2 = r^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |AC| = \sqrt{2r^2} = r \cdot \sqrt{2}$$

Der Punkt S halbiert die Strecke $\overline{AC}$.
Daher ist:
$|AS| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

Im Dreieck ASM beträgt die Größe der Winkel bei M und A 45°. Daher ist das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig und es gilt $|MS| = \frac{r}{2}\sqrt{2}$.
Damit lässt sich $|BS|$ bestimmen:
$|BS| = |BM| - |MS| = r - \frac{r}{2}\sqrt{2}$

Für die Hypotenuse a im rechtwinkligen Dreieck ABS gilt damit:

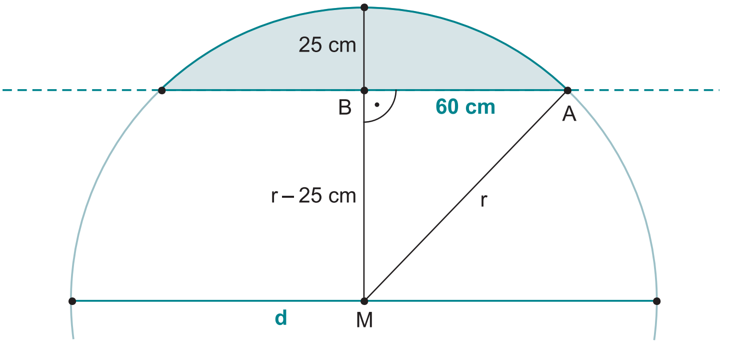
$$a^2 = |AS|^2 + |BS|^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{|AS|^2 + |BS|^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

Mit $r = 12$ cm ergibt sich

$$a = \sqrt{\left(\frac{12\text{ cm}}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(12\text{ cm} - \frac{12\text{ cm}}{2}\sqrt{2}\right)^2} \approx 9{,}18\text{ cm}$$

und hieraus für den Umfang des Achtecks:
$U = 8a \approx 8 \cdot 9{,}18\text{ cm}$ **= 73,44 cm**

220 Die Röhre habe den Radius r. Da sie 25 cm aus dem Boden herausragt, befindet sich der Mittelpunkt M der Röhre $r - 25$ cm unterhalb der Erdoberfläche.

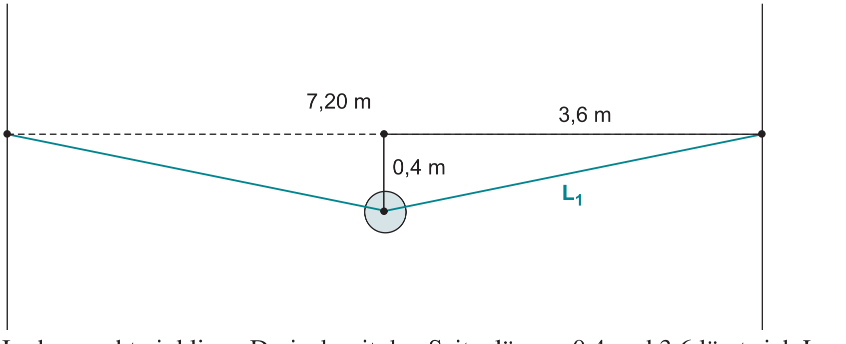


Damit lässt sich mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks ABM der Radius r bestimmen:

$$r^2 = (r - 25\text{ cm})^2 + (60\text{ cm})^2$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = r^2 - (50\text{ cm}) \cdot r + 625\text{ cm}^2 + 3\,600\text{ cm}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 50\text{ cm} \cdot r = 4\,225\text{ cm}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{4\,225\text{ cm}^2}{50\text{ cm}} = 84{,}5\text{ cm}$$

Die Röhre besitzt den Durchmesser **d** $= 2r = 2 \cdot 84{,}5\text{ cm} = 169\text{ cm}$ **= 1,69 m**.

221



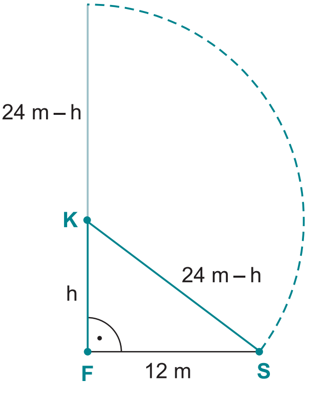
In dem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 0,4 und 3,6 lässt sich L_1 bestimmen:

$$L_1^2 = (0{,}4\text{ m})^2 + (3{,}6\text{ m})^2$$
$$\Leftrightarrow \quad L_1 = \sqrt{(0{,}4\text{ m})^2 + (3{,}6\text{ m})^2} = \sqrt{13{,}12\text{ m}^2} \approx 3{,}62\text{ m}$$

Die Ausdehnung beträgt also ungefähr $3{,}62\text{ m} - 3{,}6\text{ m} = 0{,}02\text{ m} = 2\text{ cm}$.

Dies entspricht $\frac{0{,}02\text{ m}}{3{,}6\text{ m}} \approx 0{,}006 =$ **0,6 %** der ursprünglichen Länge.

222 Wenn der Sendemast in der Höhe h abknickt, dann hat der umgestürzte Teil des Sendemastes die Länge $24\text{ m} - h$. Damit lässt sich die abgebildete Planfigur erstellen.



Im rechtwinkligen Dreieck FSK wird der Satz des Pythagoras angewandt:

$$(12\text{ m})^2 + h^2 = (24\text{ m} - h)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 144\text{ m}^2 + h^2 = 576\text{ m}^2 - 48\text{ m} \cdot h + h^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 48\text{ m} \cdot h = 432\text{ m}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{h = 9\text{ m}}$$

Der Sendemast ist in einer Höhe von 9 Metern abgeknickt.

Lösungen zum Test 3

3.1 **a** $\Omega = \{11; 12; 13; 14; 21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 34; 41; 42; 43; 44\}$

$|\Omega| = 4 \cdot 4 = 16$

b $E_1 = \{21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 34\}$ Alle Ergebnisse aus Ω mit 2 oder 3 an 1. Stelle.

$E_2 = \{34; 43; 44\}$

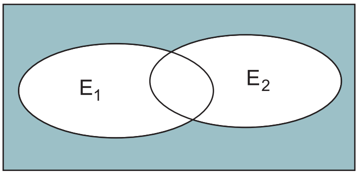
$E_3 = \{11; 12; 13; 14; 34; 41; 42; 43; 44\}$ Alle Ergebnisse aus Ω mit 1 oder 4 an 1. Stelle und 34.

$E_4 = \{21; 22; 23; 24; 31; 32; 33\}$ Alle Ergebnisse aus E_1 außer 34.

c Es gilt: $E_5 = \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

E_5: „Beim ersten Wurf fällt keine Primzahl und die Augensumme ist kleiner als 6.“

d Die farbig markierte Fläche entspricht E_5.



3.2 **a** H(nicht mit dem Bus) = H(Fahrrad) + H(Auto) + H(zu Fuß) = 75 + 55 + 30 = **160**

oder

H(nicht mit dem Bus) = 250 − H(Bus) = 250 − 90 = **160**

b $h(\text{Fahrrad} \cup \text{zu Fuß}) = \frac{75+30}{250} = \frac{105}{250} = 0{,}42 = \mathbf{42\ \%}$

c Mithilfe eines Dreisatzes ergibt sich:

250 Schüler $\hat{=}$ 360°

1 Schüler $\hat{=} \frac{360°}{250} = 1{,}44°$

x Schüler $\hat{=}$ $x \cdot 1{,}44°$

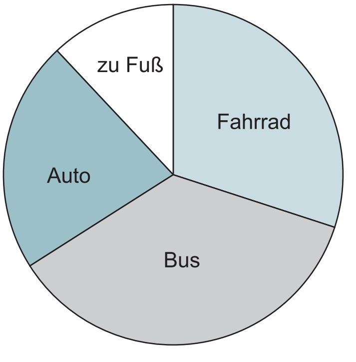
Daher gilt für die Größe der Mittelpunktswinkel der einzelnen Sektoren:

Fahrrad: 75 $\hat{=}$ $75 \cdot 1{,}44° = 108°$

Bus: 90 $\hat{=}$ $90 \cdot 1{,}44° = 129{,}6°$

Auto: 55 $\hat{=}$ $55 \cdot 1{,}44° = 79{,}2°$

zu Fuß: 30 $\hat{=}$ $30 \cdot 1{,}44° = 43{,}2°$



Alternative Berechnung:
Die Größen der Mittelpunktswinkel können auch über die relative Häufigkeit berechnet werden:

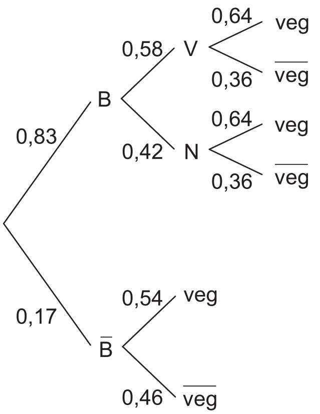
Fahrrad: $\frac{75}{250} \cdot 360° = 108°$

Bus: $\frac{90}{250} \cdot 360° = 129,6°$

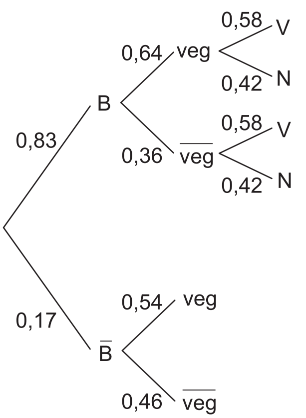
Auto: $\frac{55}{250} \cdot 360° = 79,2°$

zu Fuß: $\frac{30}{250} \cdot 360° = 43,2°$

3.3 a B: Business Lunch
V: Vorspeise
N: Nachspeise
veg: vegetarisches Hauptgericht



oder



b Die Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der 1. und 2. Pfadregel bestimmt werden:

$$\textbf{P(vegetarisch)} = \text{P(Business Lunch} \cap \text{vegetarisch)} + \text{P(Karte} \cap \text{vegetarisch)}$$
$$= 0,83 \cdot 0,64 + 0,17 \cdot 0,54 = 0,623 \mathbf{= 62,3\ \%}$$

62,3 % der Gäste wählen ein vegetarisches Hauptgericht.