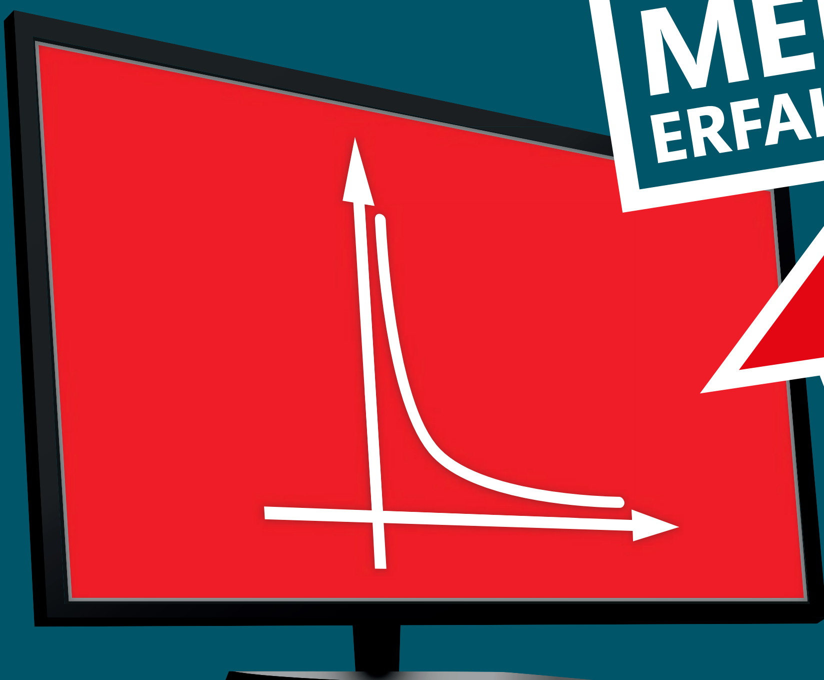
STARK digital

LESEPROBE

MATHEMATIK

Berufliche Schulen Sek. II



MEHR ERFAHREN

0602 D1

VERFÜGBARE JAHRGÄNGE

BUNDESLAND	BESCHREIBUNG	JAHRGANG
Baden-Württemberg	Berufliches Gymnasium	**ab 2010**
	Berufskolleg	**ab 2009**
Bayern	FOS/BOS 12 Nichttechnik, Technik[*]	**ab 2006**
	FOS/BOS 13 Nichttechnik	**ab 2009**
	FOS/BOS 13 Technik	**ab 2006**
	FOS/BOS Feststellungs- und Aufnahmeprüfung	**ab 2011**
	Fachschule/Fachakademie	**ab 2006**
Hessen	Berufliches Gymnasium LK/GK	**ab 2011**
Niedersachsen	Berufliches Gymnasium LK/GK	**2011 – 2013**
Nordrhein-Westfalen	Berufliches Gymnasium LK/GK	**ab 2013**
Rheinland-Pfalz	Gymnasium	**ab 2017**

[*] Der Jahrgang 2018 enthält nur die für die Fachabiturprüfung 2019 relevanten Teile.

Berufliches Gymnasium NRW – Mathematik mit GTR (Wirtschaft/Verwaltung)
Zentrale Abiturprüfung 2018 Leistungskurs – Teil B: Aufgabe 3 (Stochastik)

Aufgabenstellung (Gesamtpunktzahl 32 Punkte)
Das Unternehmen Miss Marble liefert empfindliche Glasware innerhalb Deutschlands an den Einzelhandel. Beim Transport kommt es oftmals zu Schäden. Der Transport der Glasware wird von drei Unternehmen durchgeführt: ALKW und Brummie sind auf den Glastransport mit Lastwagen spezialisiert, CRail transportiert die Glasware über das Schienennetz.

		Punkte
3.1	Es sind folgende Durchschnittswerte bekannt: 25 % der Glasteile werden von ALKW transportiert, 35 % von Brummie und 40 % von CRail. Den Unterlagen der Geschäftsführung zufolge gehen 4 % der von ALKW transportierten Glasteile zu Bruch, bei Brummie sind es 3 % und bei CRail nur 2 %.	
3.1.1	Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm mit allen Pfad- und Endwahrscheinlichkeiten dar.	5
3.1.2	Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse: E_1: Ein Glasteil wird von Brummie transportiert und geht dabei zu Bruch. E_2: Ein Glasteil wird unversehrt transportiert. E_3: Ein zerbrochenes Glasteil wurde von CRail transportiert.	6
3.2	Die Geschäftsführung hat reagiert und eine geänderte Einzelverpackung für die Glasteile in Auftrag gegeben. Dadurch wird erreicht, dass keine Transportschäden mehr auftreten. Allerdings werden die Glasteile beim Verpacken mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % beschädigt. 1 200 Glasteile werden verpackt. Es ist von einer Binomialverteilung auszugehen.	
3.2.1	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 22 und weniger als 28 der Glasteile beschädigt werden.	2
3.2.2	Bestimmen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der beschädigten Glasteile mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 75 % liegt.	3

3.3 Ein Vertreter der CRail behauptet, dass ein Glasteil mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 2 % beim Verpacken zu Bruch geht. Im Gegensatz dazu will Miss Marble nachweisen, dass diese Defektwahrscheinlichkeit zumindest unter 3 % liegt.

Dazu wollen beide Unternehmen 500 für den Transport verpackte Glaswaren untersuchen, um die beiden Vermutungen zu überprüfen.

3.3.1 Entscheiden Sie begründet, ob folgende Aussagen zutreffen:

A_1: Bei mindestens 15 defekten Glasteilen irrt CRail nur zu maximal 10 %, wenn sie behauptet, dass die Defektwahrscheinlichkeit über 2 % liegt.

A_2: Bei höchstens 11 defekten Glasteilen ist Miss Marble sich auf 10 % Signifikanzniveau sicher, dass die Defektwahrscheinlichkeit unter 3 % liegt.

A_3: Wenn in der Stichprobe genau 2,6 % der 500 Glasteile defekt sind, kann – egal, wie das Signifikanzniveau gewählt wird – entschieden werden, dass die Defektwahrscheinlichkeit über 2 % und unter 3 % liegt. 7

3.3.2 Um die hohe Qualität der neuen Verpackungen zu belegen, führt Miss Marble einen Hypothesentest zum Signifikanzniveau 5 % durch. Mit $n = 500$ ergibt sich der Ablehnungsbereich $\{0, \ldots, 8\}$.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art (β-Fehler), wenn die tatsächliche Defektwahrscheinlichkeit bei 2 % liegt. 3

3.4 Im Folgenden ist von einer Defektwahrscheinlichkeit von 2 % auszugehen.

3.4.1 Ermitteln Sie die Anzahl an Glasteilen, die untersucht werden müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % mindestens 3 defekte Glasteile darunter befinden. 3

3.4.2 Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % mindestens 5 defekte Glasteile zu erhalten, müssen 398 Glasteile untersucht werden.

Überprüfen Sie die folgende Aussage:
Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % mindestens doppelt so viele defekte Glasteile zu finden, also mindestens 10, muss die zu entnehmende Stichprobe verdoppelt werden. 3

Tipps und Hinweise

Teilaufgabe 3.1.1

- Formulieren Sie sinnvolle Ereignisse und wenden Sie die Pfadmultiplikationsregel sowie die Pfadadditionsregel an.

Teilaufgabe 3.1.2

- Sie können den Sachverhalt ggf. noch zusätzlich mithilfe der zugehörigen Sechs-Felder-Tafel oder des umgekehrten Baumdiagramms darstellen.
- Die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1)$ und $P(E_2)$ können Sie mithilfe der Pfadregeln bestimmen bzw. unmittelbar in der zugehörigen Sechs-Felder-Tafel ablesen.
- Beachten Sie, dass es sich bei $P(E_3)$ um eine bedingte Wahrscheinlichkeit handelt, die Sie auch über das umgekehrte Baumdiagramm ermitteln können.

Teilaufgabe 3.2.1

- Geben Sie eine geeignete binomialverteilte Zufallsvariable mit ihren Parametern n und p an.
- Verwenden Sie die Funktionalitäten des GTR zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe 3.2.2

- Für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße X gilt die Formel $\mu = E(X) = n \cdot p$.
- Sie können das gesuchte Intervall durch sukzessives Vergrößern der Intervalllänge bestimmen.
- Alternativ können Sie mit den Funktionalitäten des GTR eine geeignete Umgebung bestimmen.

Teilaufgabe 3.3.1

- Formulieren Sie jeweils aus der Sicht der beteiligten Parteien eine geeignete Nullhypothese H_0. Beachten Sie dabei, dass man die Behauptung, die man bestätigen möchte, als Gegenhypothese H_1 formuliert.
- Erstellen Sie jeweils entweder passende Tabellen zur kumulierten Binomialverteilung oder nutzen Sie geeignete Funktionalitäten des GTR.
- Der Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Hypothese H_0 irrtümlich verworfen (also H_1 irrtümlich angenommen) wird.
- Aussage A_1 beschreibt die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art, α-Fehler) bei einem rechtsseitigen Hypothesentest.
- Aussage A_2 beschreibt die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art, α-Fehler) bei einem linksseitigen Hypothesentest.
- Vergleichen Sie bei der Entscheidung bzgl. Aussage A_3 die Entscheidungsregeln der beiden Hypothesentests.

Teilaufgabe 3.3.2

- Der Fehler 2. Art (β-Fehler) liegt vor, wenn die Hypothese H_0 irrtümlich angenommen (also H_1 irrtümlich verworfen) wird.
- Der angegebene Ablehnungsbereich bezieht sich auf die Ablehnung von H_0 (also die Annahme von H_1).
- Beachten Sie, dass die tatsächliche Defektwahrscheinlichkeit mit $p = 0{,}02$ vorgegeben ist.

Teilaufgabe 3.4.1

- Es handelt sich hierbei prinzipiell um eine Aufgabe vom Typ „mindestens – mindestens – mindestens“.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei defekte Glasteile in einer Stichprobe vom Umfang n enthalten sind, für verschiedene Stichprobenumfänge n. Dabei können Sie sukzessive den Wert n verändern, eine geeignete Tabelle erzeugen oder ggf. vorhandene Funktionalitäten des GTR ausnutzen.

Teilaufgabe 3.4.2

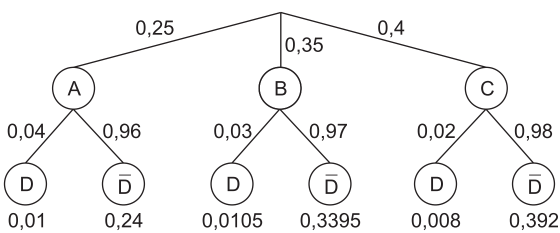
- Überprüfen Sie die Aussage, indem Sie den Stichprobenumfang und die Anzahl der mindestens gefundenen defekten Glasteile verdoppeln.
- Alternativ können Sie analog zu Teilaufgabe 3.4.1 den mindestens benötigten Stichprobenumfang ermitteln.

Lösung

3.1.1 Baumdiagramm:

A: Transport durch ALKW — B: Transport durch Brummie

C: Transport durch CRail — D: Geht zu Bruch (defekt)



3.1.2 Wahrscheinlichkeit von E_1:

Die Wahrscheinlichkeit, mit der gleichzeitig B und D eintreten, kann man unmittelbar dem Baumdiagramm aus Teilaufgabe 3.1.1 entnehmen:

$P(E_1) = P(B \cap D) = 0{,}0105$

Wahrscheinlichkeit von E_2:
Die Wahrscheinlichkeit, mit der $\overline{D}$ eintritt, kann man mithilfe der Pfadadditionsregel aus dem Baumdiagramm aus Teilaufgabe 3.1.1 berechnen:

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(\overline{D}) = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) \\ &= 0{,}24 + 0{,}3395 + 0{,}392 = 0{,}9715 \end{aligned}$$

Alternativ kann folgende Sechs-Felder-Tafel erstellt werden:

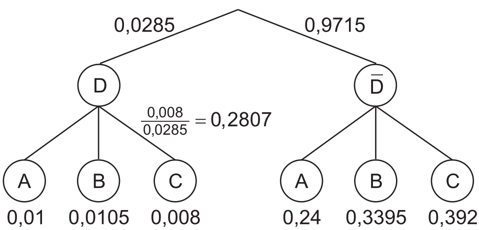
	D	$\overline{D}$	
A	0,01	0,24	0,25
B	0,0105	0,3395	0,35
C	0,008	0,392	0,4
	0,0285	**0,9715**	

Wahrscheinlichkeit von E_3:
Es handelt sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Glasteil, von dem bekannt ist, dass es zerbrochen ist (D), von CRail transportiert wurde (C):

$$P(E_3) = P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C \cap D)}{1 - P(\overline{D})} = \frac{0{,}008}{0{,}0285} \approx 0{,}2807$$

Alternative: Die zur Berechnung benötigten Werte für $P(C \cap D)$ und $P(D)$ kann man auch der Sechs-Felder-Tafel entnehmen.

Weitere Alternative: Man zeichnet das umgekehrte Baumdiagramm und ermittelt damit die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.



3.2.1 Die Zufallsgröße X = „Anzahl der beim Verpacken beschädigten Glasteile" ist binomialverteilt mit $n = 1\,200$ und $p = 0{,}02$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 22 (also mindestens 23) und weniger als 28 (also höchstens 27) Glasteile beschädigt sind, gilt dann:

$$\begin{aligned} P(22 < X < 28) &= P(23 \le X \le 27) \\ &\approx 0{,}3796 \end{aligned}$$

```
binomCdf(1200,0.02,23,27)    0.3795647869
```

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 22 und weniger als 28 Glasteile beschädigt werden, liegt bei ca. 38 %.

3.2.2 $E(X) = 1\,200 \cdot 0{,}02 = 24$

Systematisches Ausprobieren liefert:
$P(19 \le X \le 29) \approx 0{,}7444$

Das gesuchte Intervall ist [19; 29].

1200· 0.02	24.
binomCdf(1200,0.02,23,25)	0.2425771899
binomCdf(1200,0.02,22,26)	0.3935177552
binomCdf(1200,0.02,21,27)	0.5295713124
binomCdf(1200,0.02,20,28)	0.6471147142
binomCdf(1200,0.02,19,29)	0.7443756636

Alternativ können Sie mit entsprechenden Funktionalitäten des GTR dieses Intervall direkt bestimmen. Dazu bestimmt man die entsprechende 75 %-Umgebung um $\mu = 24$:

$\le 0{,}125$			$\le 0{,}875$		
$\approx 12{,}5\,\%$		$\approx 75\,\%$		$\approx 12{,}5\,\%$	
0	18	19 $\mu = 24$	29	30	1 200

invBinom(0.125,1200,0.02,1)	$\begin{bmatrix} 17 & 0.084957 \\ 18 & 0.125793 \end{bmatrix}$
invBinom(0.875,1200,0.02,1)	$\begin{bmatrix} 29 & 0.870169 \\ 30 & 0.906347 \end{bmatrix}$
binomCdf(1200,0.02,19,29)	0.744376

3.3.1 Überprüfen von A_1:
Da hier die Aussage von CRail betrachtet wird, nach der die Wahrscheinlichkeit für eine Beschädigung durch das Verpacken **mehr** als 2 % beträgt, handelt es sich um einen **rechtsseitigen** Test mit $n = 500$ sowie
H_0: $p \le 0{,}02$ und H_1: $p > 0{,}02$.

H_0: $p \le 0{,}02$		H_1: $p > 0{,}02$	
0	14	15	500

Mit dem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{15; \ldots; 500\}$ von H_0 gilt dann für die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art, α-Fehler):

$\alpha = P(X \ge 15) \approx 0{,}0814 < 0{,}1$

binomCdf(500,0.02,15,500)	0.081357

Die Aussage A_1 ist somit richtig.

Überprüfen von A_2:
Da hier die Aussage von Miss Marble betrachtet wird, nach der die Wahrscheinlichkeit für eine Beschädigung durch das Verpacken **weniger** als 3 % beträgt, handelt es sich um einen **linksseitigen** Test mit $n = 500$ sowie
H_0: $p \ge 0{,}03$ und H_1: $p < 0{,}03$.

H_1: $p < 0{,}03$		H_0: $p \ge 0{,}03$	
0	11	12	500